



KOLAS-G-002 : 2016

측정 결과의 불확도 추정 및 표현을 위한 지침

한국인정기구

Korea Laboratory Accreditation Scheme

Korean Agency for Technology and Standards, MOTIE, Korea

1. 적용 범위

본 지침서의 내용은 작업현장에서부터 기초연구에 이르는 여러 다양한 분야에서 이루어지는 측정에 대한 불확도를 그 정확도 수준에 관계없이 평가하고 표현하는데 적용될 수 있도록 하였으나 추가 표준기본법에 의한 교정기관 시험기관의 인정 평가시 우선적으로 적용한다.

기타 지침서의 원칙이 적용될 수 있는 분야는 다음과 같다.

- 생산을 위한 품질관리와 품질보증
- 법률이나 규정의 준수 및 시행
- 과학기술분야에서 기초연구, 응용연구 및 개발업무 수행
- 국가표준에의 소급성(traceability) 확보를 위해 국가측정체계 전반에 걸쳐 이루어지는 표준기나 측정기기에 대한 교정과 시험
- 표준물질을 포함한 국가측정표준의 개발, 유지 및 국제표준과의 비교 등

2. 용어의 정의

2.1 측정학 용어

이 지침서에서 사용하는 측정학 용어는 국제측정용어집(International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology, VIM)을 따른다.

2.1.1 (측정 가능한) 양 / (measurable) quantity

정성적으로 구별되고, 정량적으로 결정될 수 있는 어떤 현상, 물체, 물질의 속성

[주]

1. 이 양이라는 용어는 일반적 의미의 양 또는 특정량(particular quantity)을 뜻한다.

예 1) 일반적 의미의 양 : 길이, 시간, 질량, 온도, 전기저항, 물질량 농도

2) 특정량 : - 주어진 막대의 길이,

- 주어진 철사의 전기저항,

- 주어진 포도주의 에탄올 물질량 농도

2. 서로 상대적인 크기의 순서를 정할 수 있는 양은 같은 종류의 양이라고 한다.

3. 같은 종류의 양은 양의 부류(categories)로 분류하여 함께 묶을 수 있다.
예로서,
 - 일, 열, 에너지
 - 두께, 둘레, 파장
4. 양의 기호는 ISO 31에 수록되어 있다.

2.1.2 (양의) 값 /value (of a quantity)

측정의 단위에 어떤 수를 곱하여 일반적으로 표현된 특정량의 크기

[예]

1. 막대의 길이 : 5.34 m 또는 534 cm
2. 물체의 질량 : 0.512 kg 또는 512 g
3. 어떤 물(H₂O) 시료의 물질량 : 0.012 mol 또는 12 mmol

[주]

1. 어떤 양의 값은 양수, 음수 또는 영이다.
2. 어떤 양의 값은 한 가지 이상의 방법으로 나타낼 수 도 있다.
3. 차원이 1인 양의 값들은 일반적으로 숫자로만 나타낸다.
4. 측정의 단위에 어떤 수를 곱하여 나타낼 수 없는 양은 약정에 의한 기준 척도나 측정절차, 또는 이 두 가지 모두를 기준으로 하여 표현할 수 있다.

2.1.3 (양의) 참값 /true value (of a quantity)

주어진 특정량에 대한 정의와 일치하는 값

[주]

1. 참값은 완전한 측정에 의해서만 얻어지는 값이다.
2. 참값은 본성적으로 확정되어 있지 않다.
3. 주어진 특정량에 대한 정의와 일치하는 값은 여럿 있을 수 있다.

2.1.4 협정 참값 /conventional true value (of a quantity)

어떤 특정량에 부여된 값으로서 주어진 목적에 적합한 불확도를 가지는 것으로, 때로는 협약에 의하여 인정된 값

[예]

1. 어떤 장소에서는, 교정용표준기에 의하여 실현된 양에 부여된 값을 협정 참값으로 할 수 있다.
2. CODATA(1986)는 아보가드로 상수로 $6.022\ 136\ 7 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ 을 추천했다.

[주]

1. “협정 참값”을 때로는 설정값(assigned value), 최적 추정값(best estimate of the value), 협정값(conventional value), 상용값 또는 기준값(reference value)이라고도 부른다.
2. 어떤 양에 대한 많은 측정결과는 종종 협정 참값을 정하는데 사용된다.

2.1.5 측정 /measurement

양의 값을 결정하기 위한 일련의 작업

2.1.6 측정원리 /principle of measurement

측정의 과학적 근거

[예]

1. 온도 측정에 적용한 열전효과
2. 전위차 측정에 적용한 조셉슨 효과
3. 속도 측정에 적용한 도플러 효과
4. 분자 진동의 파수 측정에 적용한 라만 효과

2.1.7 측정방법 /method of measurement

일반적으로 기술된 측정에 사용된 논리적인 일련의 작업

[주]

측정방법에는 다음과 같은 여러 방법이 있을 수 있다.

- 치환법(substitution method)
- 차동법(differential method)
- 영위법(null method)

2.1.8 측정절차 /measurement procedure

주어진 방법에 따라 특정 측정 수행에 사용된, 명확히 기술된 일련의 작업

[주]

측정절차는 “측정절차(또는 측정방법)”라고 불리는 문서에 기록되며, 작업자가 추가적인 정보 없이 측정을 수행할 수 있도록 자세히 기술된다.

2.1.9 측정량 /measurand

측정의 대상이 되는 특정한 양

[예]

20 °C에서 물 시료의 증기압

[주]

측정량을 상세히 기술하자면 시간, 온도, 압력 등과 같은 양에 관하여 명시할 필요가 있다.

2.1.10 영향량 /influence quantity

측정량은 아니지만, 측정의 결과에 영향을 주는 양

[예]

1. 길이를 측정할 때 마이크로미터의 온도
2. 교류전압차의 크기를 측정할 때 주파수
3. 사람의 혈장시료 중 헤모글로빈의 농도를 측정할 때 비리루빈의 농도

ISO 지침서 의견: 영향량의 정의는 측정기기의 단기간 변동과 같은 현상과 주위 온도, 대기압 및 습도 등의 양뿐만 아니라 측정결과에 영향을 주는 측정

표준기, 표준물질 및 참고자료에 관련된 값도 포함하는 것으로 이해된다.

2.1.11 측정결과 /result of a measurement

측정에 의해 얻어진 측정량의 추정값

[주]

1. 측정결과가 주어지는 경우, 아래의 어느 것에 관련되는 지를 명백하게 하여야 한다.
 - 지시값
 - 보정전 결과
 - 보정후 결과
 그리고 여러 개의 값을 평균한 것인 지의 여부
2. 측정 결과의 완전한 보고는 측정 불확도에 대한 정보를 포함하여야 한다.

2.1.12 보정전 결과 /uncorrected result

계통오차를 보정하기 전의 측정 결과

2.1.13 보정후 결과 /corrected result

계통오차를 보정한 후의 측정결과

2.1.14 측정 정확도 /accuracy of measurement

측정결과와 측정량의 참값이 서로 일치하는 정도

[주]

1. “정확도”는 정성적인 개념의 용어이다
2. 정밀도(precision)라는 용어를 “정확도” 대신에 쓸 수 없다.

2.1.15 (측정결과의) 반복성 /repeatability (of results of measurements)

같은 측정 조건에서 같은 측정량을 연속적으로 측정하여 얻은 결과들 사이의 일치하는 정도

[주]

1. 이러한 조건을 반복성 조건이라 한다.
2. 반복성 조건은 다음을 포함한다.
 - 같은 측정 절차
 - 같은 관측자
 - 같은 조건 하에서 사용된 같은 측정기기
 - 같은 장소
 - 짧은 시간 내의 반복
3. 반복성은 결과의 분산 특성을 이용하여 정량적으로 표현할 수 있다.

2.1.16 (측정결과의) 재현성 /reproducibility (of results of measurements)

변경된 측정 조건에서 같은 측정량을 측정하여 얻은 결과들 사이의 일치하는 정도

[주]

1. 재현성에 대한 기술이 타당하려면 변경된 조건을 명기하여야 한다.
2. 변경된 조건은 다음을 포함할 수 있다.
 - 측정원리
 - 측정방법
 - 관측자
 - 측정기기
 - 교정용 표준기
 - 장소
 - 사용 조건
 - 시간
3. 재현성은 결과의 분산 특성을 이용하여 정량적으로 표현할 수 있다.
4. 여기서 결과란 통상 보정후 결과를 의미한다.

2.1.17 시험표준편차 /experimental standard deviation

같은 측정량에 대한 일련의 n 회 측정에서, 결과의 분산의 특성을 나타내

는 양 $s(q_k)$ 이며 다음과 같이 주어진다.

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n-1}}$$

q_k 는 k 번째 측정의 결과이며, \bar{q} 는 n 회 측정한 결과의 산술평균이다.

[주]

1. 일련의 n 개 값을 어떤 분포의 표본이라 하면, \bar{q} 는 그 분포의 모평균 μ_q 의 비편향 추정량이며, $s^2(q_k)$ 는 분산 σ^2 의 비편향 추정량이다.
2. $s(q_k)/\sqrt{n}$ 은 \bar{q} 의 분포의 추정표준편차이며, 모평균의 시험표준편차라고 한다.
3. 모평균의 시험표준편차는 종종 모평균의 표준오차라고 잘못 불리기도 한다.

ISO 지침서 부가 설명 : 이 지침서에서 사용된 표기와 일관성을 유지하기 위하여 VIM에서 사용된 기호 중 몇 개는 그 표기가 바뀌었다.

2.1.18 (측정의) 오차 / error (of measurement)

측정결과에서 측정량의 참값을 뺀 값

[주]

1. 참값은 구할 수 없으므로, 실제로는 협정 참값이 사용된다.
2. 오차와 상대오차를 구별할 필요가 있을 때, 오차는 종종 측정의 절대오차를 뜻한다. 측정의 절대오차를 오차의 크기를 나타내는 오차의 절대값과 혼동해서는 안된다.

2.1.19 상대오차 / relative error

측정의 오차를 측정량의 참값으로 나눈 값

[주]

참값은 구할 수 없으므로, 실제로는 협정 참값이 사용된다.

2.1.20 우연오차 /random error

반복성 조건을 유지하면서 같은 측정량을 무한히 측정하여 얻은 모평균을 측정결과에서 빼 값

[주]

1. 우연오차는 오차에서 계통오차를 빼 값이다.
2. 측정횟수에는 한계가 있을 수밖에 없으므로, 우연오차의 추정값만 정할 수 있을 뿐이다.

2.1.21 계통오차 /systematic error

반복성 조건을 유지하면서 같은 측정량을 무한히 측정하여 얻은 모평균에서 측정량의 참값을 빼 값

[주]

1. 계통오차는 오차에서 우연오차를 빼 값이다.
2. 참값과 마찬가지로, 계통오차와 그 원인을 완전히 알 수는 없다.
3. 측정기기에 대해서는 편향(bias, VIM 5.25) 참고

ISO 지침서 의견: 측정결과의 오차는 각각의 오차 성분이 결과의 오차에 기여하도록 하는 수많은 우연효과와 계통효과로부터 야기되는 것으로 종종 간주되기도 한다.

2.1.22 보정값 /correction

계통오차를 보상하기 위하여 보정전 측정결과에 대수적으로 더하는 값

[주]

1. 보정값은 추정된 계통오차에 음부호를 붙인 것과 같다.
2. 계통오차를 완전하게 알 수는 없으므로, 그에 대한 보상도 완전할 수는 없다.

2.1.23 보정인자 /correction factor

계통오차를 보상하기 위하여 보정전 측정결과에 곱하여 주는 수치 인자

[주]

계통오차를 완전하게 알 수는 없으므로, 그에 대한 보상도 완전할 수는 없다.

2.2 통계학 용어

이 지침서에서 사용하는 통계학 용어의 정의는 ISO Guide 부록 C로부터 발췌 수록하였다.

2.2.1 확률 /probability

우연사건이 일어날 수 있는 가능성을 나타내는 0에서 1 사이의 실수

[주]

똑같은 관측을 무수히 많이 반복하였을 때 어떤 사건이 일어나는 비율, 즉 장기간의 상대빈도 또는 사건이 일어날 수 있는 가능성(믿음)의 정도에 관련될 수 있다.

2.2.2 확률변수 ; 변량 /random variable ; variate

특정 집합으로부터 어느 값이나 취할 수 있는 변수로서 확률분포와 연관지어 지는 것이다.

[주]

이산확률변수와 연속확률변수로 나눌 수 있으며, 사건 A 의 확률을 $\Pr(A)$

또는 $P(A)$ 로 표현한다.

2.2.3 확률분포 /probability distribution

확률변수가 어떤 주어진 값을 가질 확률 또는 주어진 값의 집합에 속할 확률을 나타내는 함수

2.2.4 분포함수 /distribution function

모든 값 x 에 대하여, 확률변수 X 가 x 보다 작거나 같게될 확률을 주는 함수 :

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

2.2.5 확률밀도함수 (연속확률변수에 대한 정의) /probability density function(for a continuous random variable)

분포함수의 도함수 (그것이 존재할 때) :

$$f(x) = dF(x)/dx$$

[주]

연속확률변수 x 가 아주 작은 구간 안에 있을 확률, 즉 확률 원소 $f(x)dx$ 는 $f(x)dx = \Pr(x < X < x + dx)$ 이다.

또 두 값 a 와 b 사이의 값을 취할 확률은

$$\Pr(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{이다.}$$

2.2.6 확률질량함수 /probability mass function

이산확률변수 X 의 어떤 값 x_i 에 대하여, 확률변수 X 가 x_i 와 같게 될

확률 p_i 를 주는 함수 :

$$p_i = \Pr(X = x_i)$$

2.2.7 파라미터 ; 모수 ; 매개변수 /parameter

확률변수의 확률분포를 표현하는데 사용되는 양으로서 모집단의 특성을 나타낸다. 모수는 주어진 모집단의 고유한 상수로서 모평균(또는 기대값), 모분산 등이 있다.

2.2.8 상관 ; 상관관계 /correlation

두 개 이상의 확률변수의 분포에서 확률변수들 사이의 관련성

2.2.9 기대값 ; 모평균 /expectation ; expected value ; mean

x_i 를 가질 확률이 p_i 인 이산확률변수 X 에 대하여, 기대값은

$$\mu = E(X) = \sum x_i p_i \text{ 로 정의된다.}$$

또, 확률밀도함수 $f(x)$ 를 갖는 연속확률변수 X 에 대하여, 기대값은

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx \text{ 로 정의된다.}$$

2.2.10 분산 /variance

확률변수 X 의 분포가 모평균 μ 로부터 흩어진 정도를 나타내는 양으로서

$$\sigma^2 = V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} \text{ 로 정의된다.}$$

2.2.11 표준편차 /standard deviation

분산의 양의 제곱근 : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

2.2.12 정규분포; Laplace-Gauss 분포 /normal distribution; Laplace-Gauss distribution

연속확률변수 X 의 확률분포로서 그 확률밀도함수가

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right], \quad -\infty < x < \infty \text{ 로 주어지는 분포}$$

[주]

μ 는 정규분포의 기대값이고, σ 는 표준편차이다.

2.2.13 모집단 /population

관심의 대상이 되는 집단 전체

[주]

확률변수의 경우에 모집단을 정의하기 위하여 확률분포를 사용한다.

2.2.14 빈도; 도수 /frequency

일정 사건이 발생하는 횟수 또는 특정 계급에 속하는 관측값의 수

2.2.15 빈도분포; 도수분포 /frequency distribution

특성치의 값과 빈도 또는 상대빈도 사이의 경험적 관련을 나타내는 분포

[주]

이 분포는 히스토그램, 막대그림표, 누적빈도다각형, 이원표(two-way table) 등으로 표현될 수 있다.

2.2.16 산술평균; 평균 /arithmetic mean; average

관측값의 합을 관측값의 개수로 나눈 값. 표본평균 또는 시험평균이라고도 한다.

[주]

1. 모평균 또는 기대값은 모집단의 모수를 나타내는 것이며, 산술평균 또

는 평균은 표본으로 얻어진 자료들을 계산한 결과를 나타낸다.

2. 모집단으로부터 얻은 단순 임의표본의 산술평균은 이 모집단의 모평균에 대한 비편향 추정량이다. 그러나 기하평균, 조화평균, 중간값, 최빈값 등과 같은 통계량들이 사용되는 경우도 있다.

2.2.17 표본분산 ; 시험분산 /sample variance ; experimental variance

관측값의 분산을 나타내는 것으로 관측값들의 편차, 즉 관측값과 산술평균과의 차이로부터 다음과 같이 정의된다(2.1.17 참조).

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

표본분산은 모분산의 비편향 추정량이 된다.

2.2.18 표본표준편차 : 시험표준편차 /sample standard deviation ; experimental standard deviation

표본분산의 양의 제곱근으로 모집단 표준편차에 대한 비편향 추정량이 된다.

2.2.19 통계량 /statistic

관측값의 함수, 엄밀하게는 포본확률변수의 함수

[주]

통계량 또한 확률변수이며 관측값에 의해 구해지는 통계량의 값은 통계적인 검정에 또는 모수의 추정값으로 사용될 수 있다.

2.2.20 추정 /estimation

모집단으로부터 취한 표본에서의 관측값을 이용하여, 그 모집단의 통계적 모형으로 선택된 분포의 모수에 수치값을 부여하는 작업

[주]

그 결과는 한 개의 값, 즉 점 추정값(point estimate)으로 표현되거나 구

간 추정값(interval estimate)으로 표현될 수 있다.

2.2.21 추정량 /estimator

모수를 추정하기 위해 사용된 통계량

2.2.22 추정값 /estimate

추정의 결과로서 얻어진 추정량의 값

2.2.23 양쪽 신뢰구간 /two-sided confidence interval

T_1 과 T_2 가 관측값의 두 함수이고, θ 가 추정하려고 하는 모집단 파라미터일 때, 확률 $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ 가 $(1-\alpha)$ 보다 크거나 같다면, 즉

$$\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2) \geq (1-\alpha)$$

이라면, T_1 에서 T_2 까지의 구간을 θ 에 대한 $(1-\alpha)$ 양쪽 신뢰구간이라 한다. 여기서 $(1-\alpha)$ 는 0과 1 사이의 값이다.

2.2.24 한쪽 신뢰구간 /one-sided confidence interval

T 가 관측값의 함수이고, θ 가 추정하려고 하는 모집단 파라미터일 때, 확률 $\Pr(T \geq \theta)$ [또는 확률 $\Pr(T \leq \theta)$]가 $(1-\alpha)$ 보다 크거나 같다면, θ 가 가질 수 있는 가장 작은 값에서부터 T 까지의 구간 [또는, T 부터 θ 가 가질 수 있는 가장 큰 값까지의 구간]을 θ 에 대한 $(1-\alpha)$ 한쪽 신뢰구간이라 한다.

2.2.25 신뢰수준 ; 신뢰계수 /confidence level ; confidence coefficient

신뢰구간 또는 통계적 포함구간과 관련된 확률값 $(1-\alpha)$

2.2.26 통계적 포함구간 /statistical coverage interval

주어진 신뢰수준으로 최소한 모집단의 특정부분을 포함한다고 명시될 수

있는 구간

2.2.27 자유도 /degrees of freedom

관측값의 수에 대하여 특정 체계 내에서 임의로 결정될 수 있는 수의 개수

[주]

예를 들어 표본분산의 경우, 표본분산을 얻으려면 $(x_i - \bar{x})$ 값을 제공하여 합하여야 한다. 이때 제한조건식은 $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$ 뿐이므로 임의로 결정될 수 있는 $(x_i - \bar{x})$ 는 $n-1$ 개가 된다. 즉 표본의 크기는 n 이지만 $(x_i - \bar{x})$ 는 $n-1$ 개 만이 임의로 결정된다. 따라서 표본분산의 자유도는 $n-1$ 이다. 만약 최소제곱방법에 의하여 직선의 절편과 기울기를 결정하기 위하여 n 개의 독립적인 관측값이 사용되었다면, 절편 또는 기울기에 대한 표준불확도의 자유도는 $v=n-2$ 이다. 또 n 개의 관측값에 대한 m 개의 파라미터의 최소제곱 적합선에 대해서는, 각각의 파라미터에 대한 표준불확도의 자유도는 $v=n-m$ 이 된다.

2.3 불확도 관련 용어

2.3.1 (측정)불확도 /uncertainty (of measurement)

사용된 정보를 기초로 하여, 측정량에 대한 측정값의 분산 특성을 나타내는 음이 아닌 파라미터

[주]

1. 위의 파라미터는 표준편차(또는 그의 배수), 또는 명시된 신뢰구간의 반너비 등이 될 수 있다.
2. 측정 불확도는 일반적으로 여러 성분으로 구성되어 있으며, 크게 두 부류로 나눌 수 있다. 한 부류는 여러 번 측정한 결과의 통계적인 분포로부터 값이 결정되는 것으로 시험 표준편차로 나타낼 수 있고, 다른 부류는 마찬가지로 표준편차로 나타낼 수 있지만, 경험이나 다른 정보에 근거하여 가정한 확률분포로부터 그 값이 결정되는 것이다.
3. 측정결과는 측정량의 값에 대한 최선의 추정값이라 할 수 있으며, 여러 가지 원인으로부터 오는 다양한 불확도 성분이 모두 분산의 원인이 되는데, 사용된 표준기와

표준물질, 보정 등에 관련된 성분처럼 계통효과에서 기인하는 성분도 포함된다.

2.3.2 (불확도의) A형 평가 /Type A evaluation (of uncertainty)

일련의 관측값을 통계적으로 분석하여 불확도를 구하는 방법

2.3.3 (불확도의) B형 평가 /Type B evaluation (of uncertainty)

일련의 관측값의 통계적인 분석이 아닌 다른 방법으로 불확도를 구하는 방법

2.3.4 합성표준불확도 /combined standard uncertainty

측정결과가 여러 개의 다른 입력량으로부터 구해질 때 이 측정결과의 표준 불확도를 합성표준불확도라 한다. 합성표준불확도는 각 입력량의 변화가 측정 결과에 미치는 영향에 따라 가중된 분산과 공분산의 합의 양의 제곱근과 같다.

2.3.5 확장불확도 /expanded uncertainty

측정량의 합리적인 추정값이 이루는 분포의 대부분을 포함할 것으로 기대되는 측정결과 주위의 어떤 구간을 정의하는 양

[주]

1. 위에서 부분은 포함확률 또는 구간의 신뢰수준을 뜻하는 것으로 본다.
2. 특정한 신뢰수준을 확장불확도에 의해 정의되는 구간과 관련짓기 위해서는 측정결과와 그 합성표준불확도로 결정되는 확률분포에 관한 명백하거나 합리적인 가정이 요구된다. 구간에 부여할 수 있는 신뢰수준은 그 가정이 성립되는 범위에서만 알 수 있다.

2.3.6 포함인자 /coverage factor

확장불확도를 구하기 위하여 합성표준불확도에 곱하는 수치인자

[주]

포함인자 k 의 값은 보통 2와 3 사이에 있다.

2.4 약어 목록

- BIPM : International Bureau of Weights and Measures, 국제도량형국
- CIPM : International Committee of Weights and Measures, 국제도량형위원회
- CRM : Certified Reference Material, 인증표준물질
- IEC : International Electrotechnical Commission, 국제전기기술위원회
- IFCC : International Federation of Clinical Chemistry, 국제임상화학연합회
- ISO : International Organization for Standardization, 국제표준화기구
- IUPAC: International Union of Pure and Applied Chemistry, 국제순수 및 응용화학연합회
- IUPAP: International Union of Pure and Applied Physics, 국제순수 및 응용물리연합회
- OIML : International Organization of Legal Metrology, 국제법정계량기구
- VIM : International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology, 국제측정용어집

3. 기본 개념

측정결과의 신뢰성을 나타내기 위하여 지금까지는 오차, 정확도, 정밀도, 불확도 등의 여러 가지 용어들이 사용되어 왔으나, 분야에 따라 표현방법이 달라서 통일된 지침이 필요하게 되었다. 1993년 국제표준화기구(ISO)에서 측정불확도 표현 지침서(Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)가 발행된 후, 이 지침서에 따라서 측정 불확도를 구하고 표현하는 방법이 전 세계적으로 많은 분야에 확산되어 사용되고 있다.

이 장에서는 측정에 대한 일반적인 설명과 함께 불확도의 정의와 새로운

개념을 그 동안 사용되어 온 오차의 개념과 비교하였으며, 실제적으로 이 지침서를 이용할 경우에 유의하여야 할 점들을 설명하였다.

3.1 측 정

측정의 목적은 측정량의 값, 즉 측정하고자 하는 특정한 양의 값을 결정하는 것이다. 따라서 측정을 하기 위해서는 먼저 측정량, 측정방법, 측정절차들을 적절히 정의하고 명시하여야 한다. 일반적으로, 측정결과는 측정량의 값에 대한 근삿값 또는 추정값일 뿐이므로, 그 값에 대한 불확도가 함께 명시될 때에 비로소 완전해진다.

실제로, 측정량에 대한 정의는 요구되는 측정 정확도에 의하여 결정된다. 요구되는 정확도가 높을수록 측정량에 대한 정의를 더욱 엄밀하게 하여 측정의 목적에 맞는 측정량의 값을 얻을 수 있도록 하여야 한다.

[예]

1 m 정도 되는 쇠막대기의 길이를 μm 의 정확도로 측정하고자 하는 경우에 그 측정량이 정의되는 온도와 압력을 명시해야 한다. 예를 들면, '25.00 $^{\circ}\text{C}$, 101 325 Pa에서의 막대기의 길이'와 같이 표현한다. 그리고 이것으로 충분치 못하다고 판단되면 막대기의 지지 방법까지도 포함되어야 한다. 그러나, 요구되는 정확도가 mm 정도에 불과한 경우라면, 측정량에 대한 정의에 온도나 압력 등은 필요하지 않을 것이다.

많은 경우에, 측정결과는 반복성 조건 하에서 얻어진 일련의 관측을 기초로 하여 결정된다. 반복된 관측에서 변동이 생기는 원인은 측정결과에 영향을 미치는 여러 가지 양들, 즉 영향량이 항상 일정한 값을 유지하고 있지 않기 때문이다.

또한 측정에서 반복된 관측값들을 측정결과로 변환해 주는 함수 관계식, 즉 측정의 수학적 모델도 매우 중요한데, 그 이유는 이 모델이 관측값 외에도 일반적으로 정확하게 알지 못하는 다양한 영향량들을 포함하기 때문이다. 이러한 정확하게 알지 못하는 것들은 반복된 관측값의 변동과 수학적 모델 자체에 연관된 불확도처럼 측정결과의 불확도에 영향을 미치는 원인이 된다.

3.2 오차와 보정

3.2.1 오 차

오차는 측정결과에서 측정량의 참값을 뺀 값으로 정의하는데, 일반적으로 측정에는 여러 가지 불완전한 요소가 있으므로 측정결과에는 오차가 있게 마련이다. 오차는 우연성분과 계통성분의 두 성분으로 분류하여 왔다.

[주]

오차는 하나의 이상적인 개념이며 실제로는 오차를 정확하게 알 수 없다. 왜냐하면 참값은 실제로 알 수 없는 양이기 때문이다.

3.2.2 우연오차

우연오차는 영향량들이 시간적, 공간적으로 예측할 수 없게 변동하므로 생긴다. 이러한 변동의 영향을 우연효과라 하며, 이는 측정량을 반복 관측할 때 그 값이 변동하는 원인이 된다. 우연오차를 보정할 수는 없으나, 관측의 횟수를 늘림으로써 줄일 수는 있다. 이 우연오차의 기대값은 영이다.

[주]

1. 일련의 관측값에 대한 산술평균의 시험표준편차는 산술평균의 우연오차가 아니다. 이는 잘못 사용되고 있는 경우이며, 사실은 우연효과에 의한 산술평균의 불확도를 나타낸다. 우연효과에 의한 오차의 정확한 값은 알 수 없다.
2. 이 지침서에서는 오차와 불확도에 관해 특별히 구분하고자 하며, 이는 동의어가 아니고 개념이 완전히 다르므로, 혼동하지 말아야 한다.

3.2.3 계통오차

계통오차도 우연오차와 마찬가지로 제거할 수는 없지만 줄일 수는 있다. 만일 계통오차가 알 수 있는 영향량의 효과(이하 계통효과라 함)로부터 생긴다면, 그 효과는 정량화될 수 있다. 이 효과가 측정에서 요구되는 정확도에 비하여 무시할 수 없을 정도의 크기라면, 이를 보상하기 위하여 보정값이나 보정인자를 적용할 수 있다. 보정을 한 후의 계통효과에 의한 오차의 기대값은 영

이라고 본다. 따라서, 측정의 결과에 큰 영향을 미치는 계통효과를 보정하여야 하며, 그러한 효과를 구분해 내는 노력을 하여야 한다.

[주]

1. 계통효과를 보상하기 위하여 측정결과에 적용한 보정값의 불확도는 편향(bias)이라고 불리는 계통오차가 아니다. 이것은 필요로 하는 보정값을 정확하게 모르기 때문에 생기는 불확도이다. 계통효과를 완전하게 보정해주지 못해서 생기는 오차는 정확하게 알 수 없다.
2. 측정기기나 측정시스템은 측정표준이나 표준물질을 이용하여 계통효과를 제거하기 위하여 조정되거나 교정되어야 하며, 그 표준과 표준물질의 불확도를 고려하여야 한다.

3.3 불확도

3.3.1 불확도와 오차

측정결과의 불확도는 측정량의 값을 정확하게 알 수 없다는 사실을 반영하고 있다. 측정결과는 이미 알고 있는 계통효과를 적절하게 보정하여도 역시 추정값에 불과하다. 왜냐하면, 계통효과에 대한 완전한 보정이 불가능하고 또 우연효과가 있기 때문에 측정결과에는 항상 불확도가 존재하기 때문이다.

[주]

적절한 보정을 한 후의 측정결과는 우연히 측정량의 값에 매우 가까울 수도 있으며 따라서 오차는 매우 작을 수 있다. 그러나 측정결과의 불확도는 매우 클 수도 있기 때문에 불확도와 오차는 구별하여야 한다.

그림 3.1은 이 지침서가 오차가 아닌 불확도에 초점을 두고 있는 이유를 잘 나타내고 있다. 측정자는 반복 관측으로 얻은 미지의 확률분포 또는 이용 가능한 정보에 근거한 주관적 또는 선형적 분포로부터, 인지된 계통효과에 대한 보정을 포함한, 입력량의 값과 표준불확도(추정표준편차)를 함께 추정한다. 그 다음 입력량의 추정값으로부터 측정결과를 구하고, 그 추정값의 표준불확도로부터 합성표준불확도를 구한다. 이러한 모든 과정이 적절하게 이루어지고 주요한 계통효과를 빠뜨리지 않고 고려하였다면 측정결과는 측정량의

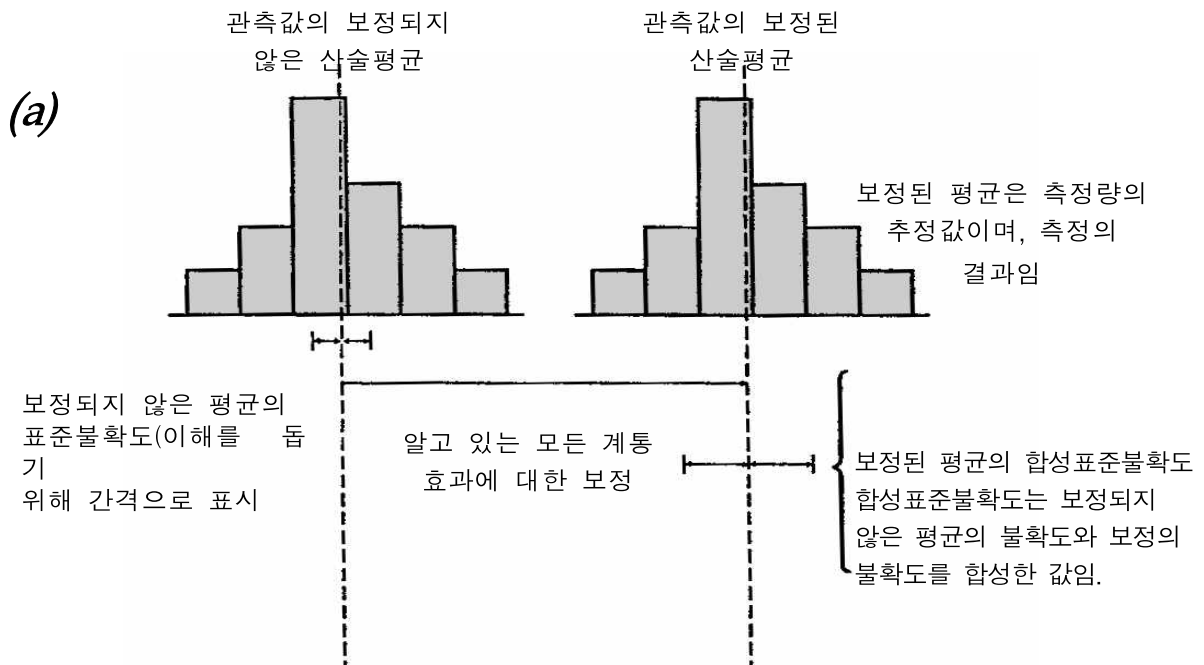
값에 대한 신뢰성 있는 추정값이 되며 합성표준불확도는 측정결과의 가능한 오차에 대한 신뢰성 있는 척도가 된다고 할 수 있다.

그림 3.2는 그림 3.1에서 나타낸 오차와 불확도에 대한 개념을 다른 방식으로 나타낸 것이다. 또한 그림 3.2는 측정량의 정의가 불완전할 경우 측정량의 값이 여러개 존재할 수 있다는 사실도 나타내고 있다(그림 3.2의 g 참조). 이와 같이 측정량의 불완전한 정의로 인하여 생기는 불확도는 같은 방법, 같은 기기 등을 사용하여 측정량을 여러 번 실현한 다음 이를 측정하여 평가될 수 있다.

[주]

그림 3.2에서 “분산”이라고 표시된 난에서의 분산은 5.1.1에 있는 식 (5.1)에서 정의된 분산 $u_j^2(y)$ 들을 나타내고 있다. 따라서 이들 분산들은 그림에서와 같이 대수적으로 합한다.

관측가능한 양에 근거한 개념



알 수 없는 양에 근거한 이상적 개념

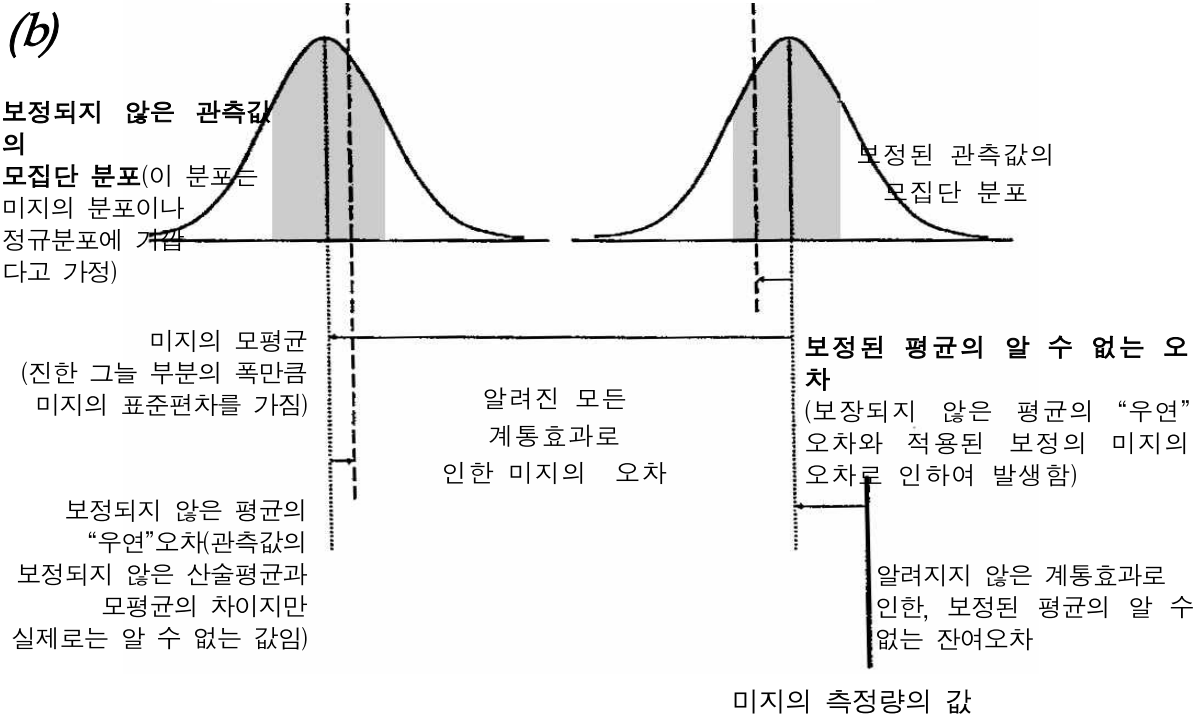


그림 3.1. 오차와 불확도의 개념

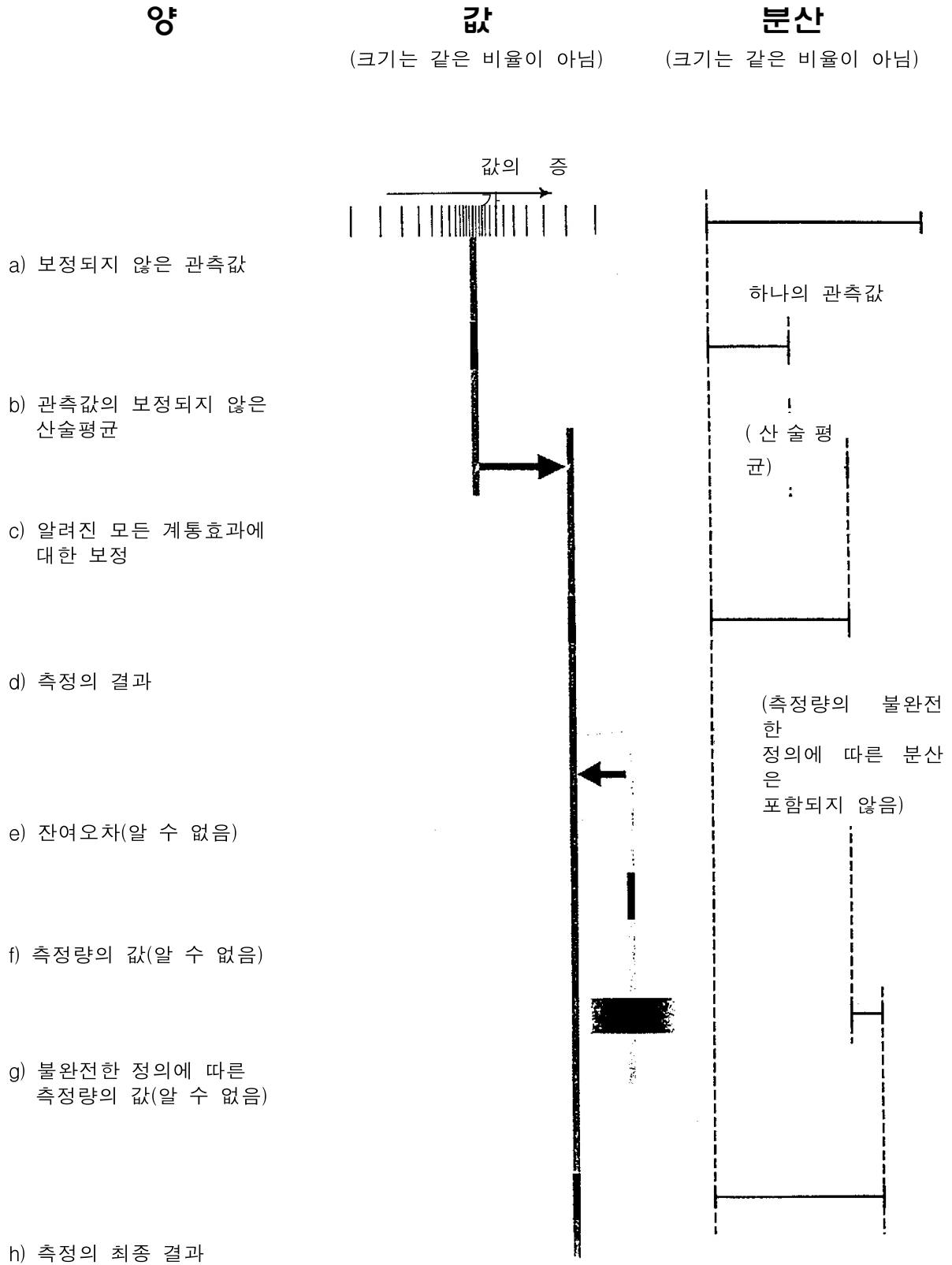


그림 3.2. 값, 오차, 불확도의 개념

3.3.2 불확도의 원인

실제적으로 측정에서는 불확도의 요인이 많이 존재하며 아래와 같은 것을 포함한다.

- 1) 측정량에 대한 불완전한 정의
- 2) 측정량의 정의에 대한 불완전한 실현
- 3) 대표성이 없는 표본추출
- 4) 측정 환경의 효과에 대한 지식 부족 및 환경 조건에 대한 불완전한 측정
- 5) 아날로그 기기에서의 개인적인 판독 차이
- 6) 기기의 분해능과 검출 한계
- 7) 측정표준과 표준물질의 부정확한 값
- 8) 외부자료에서 인용하여 데이터 분석에 사용한 상수와 파라미터의 부정확한 값
- 9) 측정방법과 측정과정에서 사용되는 근삿값과 여러 가지 가정
- 10) 외관상 같은 조건이지만 반복적인 측정에서 나타나는 변동

이러한 요소들은 서로 영향을 줄 수 있고, 1)에서 9)까지의 원인이 10)에 영향을 줄 수도 있다. 인식되지 않은 계통효과는 불확도를 구하는데 고려되지 못할 수밖에 없지만 이것이 오차의 원인은 된다.

3.3.3 불확도 평가의 구분

불확도 성분의 평가는 구하는 방법에 따라 두 가지 종류로 분류하며, 이를 '불확도의 A형 평가(또는 A형 불확도 평가)', 또는 '불확도의 B형 평가(또는 B형 불확도 평가)'라고 부른다. 이 용어의 의미는 '불확도 성분'을 평가하는데 A형과 B형으로 나누며 그 중의 하나를 가리키는 것이고 불확도 성분 자체가 두 가지 종류가 있다는 것이 아니다. 또한 여기서 '평가'는 '값을 구한다'는 의미이다. 이 분류는 불확도에 적용되는 것으로 오차에 대하여 사용하던 '우연'이나 '계통'이라는 용어를 대치하는 것은 아니다. 알려진 계통효과에 대한 보정에 따른 불확도는 경우에 따라 A형 평가에 의해 구해질 수도 있고, B형 평가에 의해 구해질 수도 있다. 우연효과에 대한 불확도의 경우도 마찬가지이다.

[주]

1. 불확도 성분을 '우연'이나 '계통'으로 분류하여 우연효과나 계통효과에 의한 오차와 결부시키는 경우도 있으나 이러한 구분은 실제로 적용할 때 애매해질 수 있다. 즉 어떤 측정에서 우연효과에 의한 성분이 다른 측정에 그 결과가 사용되는 경우에는 계통성분이 될 수 있다. 따라서 성분자체로 분류하는 것보다는 불확도의 산출방법에 따라 분류하는 것이 명확하다. 또한 두 가지 다른 방법으로 구한 개별성분들을 필요에 따라 합칠 수도 있다.
2. A형과 B형 평가로 분류하는 목적은 불확도 성분을 산출하는 두 가지 다른 방법을 보이고 논의하는데 편리하게 하기 위함이다. 그러나 이 분류는 두 가지 다른 산출방법에서 얻은 불확도 성분이 본질적으로 어떤 차이가 있다는 것을 의미하지는 않는다. 두 가지 모두 확률분포에 근거하여 구해지며 어떤 방법으로 구하든지 불확도 성분은 분산이나 표준편차에 의하여 정량화된다.

3.3.4 A형과 B형 표준불확도 평가

A형 불확도 평가에서 분산의 추정값 u^2 은 반복 측정된 값으로부터 계산되며, 이는 통계학에서 사용되는 표본분산 s^2 에 해당한다. 추정 표준편차 u 는 u^2 의 양(+)의 제곱근으로서 $u = s$ 이 되며 이를 편의상 'A형 표준불확도'라고 부른다. B형에 의해 산출되는 분산의 추정값 u^2 은 이미 알려진 정보를 이용하여 구하며, 이때 추정 표준편차 u 를 'B형 표준불확도'라고 부른다. 즉, A형 표준불확도는 반복 측정값의 빈도분포에 근거한 확률밀도함수에서 구하는 반면, B형 표준불확도는 기존의 정보 또는 문헌을 통해 측정값이 가질 수 있는 확률밀도함수를 가정하여 구한다. 두 가지 방법은 모두 확률에 근거를 둔 것이다.

3.3.5 합성표준불확도

측정결과가 여러 개의 다른 입력량으로부터 구해질때 이 측정결과의 표준불확도를 '합성표준불확도'라 하며, u_c 로 표시한다. 이는 측정결과에 대한 추정 표준편차이다. 합성표준불확도는 여러 입력량들의 분산과 공분산 성분으로부터 얻어지는 합성분산의 양의 제곱근으로서 불확도 전과 법칙에 의해 구해진다.

3.3.6 확장불확도

보건, 안전분야는 물론 산업과 통상분야에서도 그 필요성이 대두됨에 따라 확장불확도가 도입되었으며, 확장불확도 U 는 합성표준불확도 u_c 에 포함인자 k 를 곱하여 얻는다. 이러한 확장불확도를 도입한 목적은 측정량의 합리적인 추정값이 이루는 분포의 대부분을 포함할 것으로 기대되는 측정결과 주위의 어떤 구간을 제공해 주자는 것이다. 포함인자 k 의 값은 그 구간에 대해 요구되는 포함확률 또는 신뢰수준에 따라 정해지는데, 보통 2와 3 사이의 값을 갖는다.

[주]

어떤 측정결과의 확장불확도가 (이로부터 영향을 받는) 또 다른 측정결과의 합성표준불확도를 구하는데 사용될 때 하나의 표준불확도 성분으로 회복될 수 있도록 하기 위해서 항상 포함인자 k 의 값을 명시하여야 한다.

3.4 새로운 개념과 기존 개념의 비교

앞에서 설명한 측정 불확도에 대한 새로운 정의는 측정결과와 이에 대한 불확도에 초점을 맞춘 것이며 지금까지 사용되어온 불확도의 개념과 모순된 것은 아니다. 지금까지 사용되어 왔던 불확도의 개념은,

- 측정량의 추정값이 가질 수 있는 오차
- 측정량의 참값이 속해있는 범위를 나타내는 추정값이며,

이 두 개념들은 이상적으로는 타당하지만 현실적으로는 알 수 없는 양들

즉, 측정결과의 “오차”와 측정량의 “참값”에 초점을 맞춘 것이다. 그러나 어떠한 불확도의 개념을 사용하더라도 불확도 성분은 항상 동일한 데이터와 관련정보를 사용하여 평가된다.

새로운 불확도의 평가방법은 여러 번의 관측값을 통계적인 방법으로 평가하는 방법(A형 평가)과 그 이외의 수단을 이용하는 방법(B형 평가)으로 구별하여 여러 입력량의 표준불확도를 구하고, 불확도 전과 법칙에 따라 모든 표준불확도를 합하여 합성표준불확도를 구한다. 그 다음 포함인자를 적용하여 총체적인 확장불확도를 구한다. 이 확장불확도를 이용하여 여러 분야에서 실제적으로 사용될 수 있는 측정량의 값이 포함될 수 있는 구간을 나타낼 수 있다.

새로운 방법과 기존방법을 비교해 보면 불확도 성분의 분류 방법에 있어서도 차이가 있음을 알 수 있다. 불확도 성분의 분류방법을 보면 과거에는 그 발생요인에 따라 각각 우연오차와 계통오차로 분류하였으나, 새로운 방법의 경우는 평가방법에 따라 즉, 일련의 반복 측정결과에 통계적 방법을 적용하여 얻어진 A형 불확도와 기타의 방법으로 평가된 B형 불확도로 분류한다. 과거와 현재의 불확도 성분의 분류방법은 분류성격이 완전히 다르기 때문에 기존의 오차 성분을 새로운 개념의 불확도 성분으로 직접 연관지어려는 생각은 버려야 한다. 우연효과에 대한 불확도가 A형 평가에 의하여 구해질 수도 있고, B형 평가에 의하여 구해질 수도 있는 것이다.

3.5 실제 고려사항

3.5.1 측정모델

측정 불확도는 모든 영향량에 대한 통계처리에 의해 구할 수 있지만, 시간적 또는 경제적인 면을 고려하여 실제적으로는 측정의 수학적 모델과 불확도 전과 법칙을 이용하여 구한다. 수학적 모델은 요구되는 정확도 수준에 맞추어 설정한다.

수학적 모델이 불완전할 수도 있으므로, 각 관련되는 양들의 변화를 충분히 측정해야 한다. 경험적 모델은 충분한 기간을 두고 얻은 데이터나, 표준

기 및 표준물질이나 관리도 등을 이용하여 설정한다. 모델이 부적합할 경우에는 수정해야 하며, 신뢰성이 있는 결과와 불확도의 산출을 위하여 시험계획을 잘 설정하는 것이 중요하다.

측정이 적절하게 수행되는지의 여부를 확인하기 위해서 실제 측정값의 변화에 따른 표준편차와 여러 입력량으로부터 예상되는 표준편차를 비교해 볼 수도 있다. 이러한 경우에 실제 시험적 관측이 가능한 변화(A형이나 B형에 관계없이)에 직접 관련된 사항만이 고려되어야 한다.

또한 계통효과에 대한 보정의 불확도를 측정결과의 불확도 평가에 포함시킬 필요가 없는 경우도 있다. 비록 그에 대한 불확도가 산출되었더라도 합성표준불확도에 미치는 영향이 작을 때는 무시하여도 된다. 보정값 자체가 합성표준불확도에 비해 매우 작을 때에도 역시 무시할 수 있다.

3.5.2 계량기의 오차

특히 법정계량에 관련되어, 검사대상 측정기기가 측정표준기와의 비교를 통하여 검사될 때, 표준기 및 비교절차에 관련된 불확도가 검사에서 요구되는 정확도에 비하여 무시할 수 있을 때가 종종 있다. 예를들면 잘 교정된 질량 표준기를 이용하여 상품용 저울의 정확도를 검사하는 경우로서, 앞에서 언급한 불확도 성분들이 무시할 정도로 작으므로, 측정은 검사대상 측정기기의 오차를 결정하는 것으로 간주될 수 있다.

3.5.3 채택된 측정표준 값과 SI 값과의 차이

측정량의 추정값이 가끔 SI 관련 단위로 표현되지 않고 국제기구에서 채택된 측정표준 값으로 표현되는 경우가 있다. 이 경우 측정결과에 대한 불확도의 크기는 SI 관련 단위로 표현할 때 보다 훨씬 작아질 수도 있다. 이 경우의 실제적 측정량은 측정된 값과 채택된 값과의 비로 다시 정의된다.

예로서, 고품질의 Zener 전압표준기가 CIPM에서 추천한 조셉슨 상수의 값을 적용한 조셉슨 전압기준기와의 비교에 의해서 교정된다고 하자. Zener 전압표준기의 교정된 전위차 V_s 를 조셉슨 상수의 추천값으로서 표현할 경

우 V_s 의 상대 합성표준불확도 $u_c(V_s)/V_s$ 는 2×10^{-8} 이 된다. 그러나 V_s 를 SI 단위로 표현할 경우 $u_c(V_s)/V_s$ 는 4×10^{-7} 이 되는데 그 이유는 조셉슨 상수의 SI 값과 연관된 불확도를 추가로 고려해야 하기 때문이다.

3.5.4 불량 데이터

자료를 분석하거나 기록하는 과정에서의 오류는 측정결과에 알 수 없는 오차를 유발시킨다. 큰 값을 가진 오류는 쉽게 찾아낼 수 있지만, 작은 값을 가진 것은 마치 우연효과에 의한 것으로 보일 수도 있다. 불확도는 이러한 불량 데이터까지 고려하고자 하는 것은 아니다.

3.5.5 불확도의 품질과 유용도

이 지침서는 불확도의 산출에 필요한 기본 틀을 제공할 뿐이며, 이를 위한 필수적 요소는 깊은 사고력, 학자적인 양심, 전문적인 기술이라 하겠다. 불확도의 산출은 단순한 반복적인 작업이 아니며, 순수한 수학적일도 아니며, 측정에 관련된 세부내용에 따라 달라진다. 보고되는 불확도의 품질과 유용성은 불확도에 대한 이해수준, 분석의 정확한 정도, 계산하는 사람의 인격 등에 달려 있다.

4. 표준불확도

4.1 측정 모델의 설정

4.1.1 측정량의 함수 표현

대부분의 경우, 측정량 Y 는 직접 측정되지 않고, 측정방정식이라 부르는 함수관계 f 를 통하여 N 개의 다른 양 X_1, X_2, \dots, X_N 으로부터 결정된다.

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (4.1)$$

[주]

1. 일련의 관측에 있어서, X_i 의 k 번째 관측값은 $X_{i,k}$ 로 나타낸다. 따라서 만일 R 이 저항기의 전기저항을 나타낸다면 k 번째 관측값은 R_k 로 표시한다.
2. X_i 의 추정값은 x_i 로 표시한다.

[예]

만일 어떤 전기저항기의 양 단자에 전위차 V 가 가해졌다고 하자. 이 저항기가 정의된 온도 t_0 °C 때에 저항값이 R_0 이고 전기저항의 선형온도계수가 α 라고 하면, 온도 t °C일 때 그 저항기에 의하여 소비된 전력 P (측정량)에 대하여 다음과 같은 수학적 모델을 설정할 수 있다.

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/R_0[1 + \alpha(t - t_0)]$$

4.1.2 함수 f 와 입력량

입력량 X_1, X_2, \dots, X_N 그 자체가 측정량으로 간주될 수도 있고, 또 계통효과에 대한 보정값 및 보정인자를 포함하여 다른 여러 양에 의존할 수 있기 때문에 분명히 표현할 수 없는 복잡한 함수관계 f 가 될 수도 있다. 함수 f 는 시험적으로 결정되거나 혹은 수치적으로 계산되는 알고리즘으로서만 존재할 수도 있다. 이 지침서에서는 광의로 해석하여 함수 f 가 모든 보정값과 보정인자뿐 아니라 측정결과의 불확도 성분에 기여하는 모든 양을 포함하는 것으로 본다.

따라서 만일 설정된 모델이 측정결과의 요구정확도에 비추어 불충분하다는 것이 실제 데이터에서 나타나면 이 부적합성을 제거하기 위하여 추가 입력량을 함수 f 에 포함시켜야 한다. 위의 예에서 추가입력량은 전기저항기에 불균일하게 분포되어 있는 온도분포 또는 전기저항기의 비선형 온도계수 또는 기압에 대한 의존성 등이 될 수 있다.

4.1.3 입력량의 분류

입력량 X_1, X_2, \dots, X_N 은 다음과 같이 두 가지로 분류될 수 있다.

- 그 값과 불확도가 현재의 측정에서 직접 결정되는 양: 단일측정이나 반복측정 혹은 경험에 의한 판단으로부터 얻어진 양; 지시값의 보정이나 주위의 온도나 기압, 습도 등과 같은 영향량에 대한 보정 등
- 그 값과 불확도가 외부로부터 도입되는 양: 교정된 표준기나 인증표준 물질, 핸드북에서 얻어진 참고자료에 관련된 양 등

4.1.4 측정량의 추정값 y

측정량 Y 의 추정값은 y 로 표시하며, N 개의 입력량 X_1, X_2, \dots, X_N 의 입력 추정값 x_1, x_2, \dots, x_N 을 이용하여 식 (4.1)로부터 얻어진다. 따라서 측정결과인 출력 추정값 y 는 다음 식으로 주어진다.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (4.2)$$

[주]

측정량 Y 의 추정값 y 는 평균의 적용방법에 따라 다음과 같은 두 가지 방법으로 얻을 수 있다.

방법 1: 함수 f 의 각 입력량의 평균값을 사용하여 추정값 y 를 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$$

여기서 $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k}$ 는 각 측정값 $X_{i,k}$ 의 산술평균이다.

방법 2: 어떤 경우에 추정값 y 는 Y 에 관한 n 개의

독립적으로 결정된 값 Y_k 의 산술평균 (4.2.1 참조)으로 다음 식과 같이 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned}
 y = \bar{Y} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k})
 \end{aligned}$$

여기서 각 Y_k 는 같은 불확도를 가지며, N 개의 입력량 X_i 에 대하여 동시에 얻어진 완전한 한 별의 관측값에 근거한 것이다.

만일 함수 f 가 X_i 의 선형함수이면 두 가지 방법에 의한 결과가 동일하지만, 함수 f 가 비선형 함수이면 방법 2가 더 바람직하다. 또 만일 각 입력량을 별도로 여러 번씩 측정하여 평균을 구한 경우 방법 2는 부적합하며 각 입력량의 측정회수가 서로 다를 경우에는 방법 2는 적용할 수 없다.

4.1.5 y 및 x_i 의 추정표준편차

측정량의 추정값 y 의 추정표준편차는 합성표준불확도라 부르고 $u_c(y)$ 로 나타내며 각 입력량의 추정값 x_i 의 추정 표준편차 즉 표준불확도 $u(x_i)$ 로부터 결정된다.

4.1.6 입력량의 확률분포와 A형 및 B형 평가

각 입력량의 추정값 x_i 와 이에 대한 표준불확도 $u(x_i)$ 는 입력량 X_i 가 가질 수 있는 값들의 분포로부터 얻어진다. 이 확률분포는 빈도분포, 즉 X_i 에 대한 일련의 관측값 $X_{i,k}$ 에 근거를 둔 분포이거나 또는 선형적 분포일 수 있다. 표준불확도 성분의 A형 평가는 빈도분포에 근거를 두고 있고, 반면에 B형 평가는 선형적 분포에 근거를 두고 있다.

4.2 표준불확도의 A형 평가

4.2.1 입력량의 추정값

대부분의 경우에, 임의로 변하는 양 q (확률변수)에 대하여 동일한 측정 조건 하에서 n 개의 독립된 관측값 q_k 가 얻어졌다면 그 기대값 μ_q 의 최적

추정값은 이들 n 개의 관측값의 산술평균 \bar{q} 가 되며 다음 식으로 주어진다.

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \quad (4.3)$$

그러므로, n 개의 독립된 반복 관측값 $X_{i,k}$ 로부터 추정되는 입력량 X_i 에 대하여, 식 (4.3)으로부터 얻어진 산술평균 \bar{X}_i 가 식 (4.2)의 입력 추정값 x_i 로 사용되어 측정결과 y 를 결정한다. 즉 $x_i = \bar{X}_i$ 이다.

4.2.2 시험표준편차

개개의 관측값 q_k 는 영향량의 우연변동 즉 우연효과 때문에 각기 다른 값을 갖는다. 관측값의 실험분산은 q 의 확률분포의 분산 σ^2 을 추정하는 것으로서 다음 식으로 주어진다.

$$s^2(q_k) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2 \quad (4.4)$$

위의 추정분산값과 그 양의 제곱근 즉 시험표준편 차인 $s(q_k)$ 는 관측값 q_k 의 변동도를 나타내며, 보다 명확히 말하면, 산술평균 \bar{q} 로부터 산포된 정도를 나타낸다.

4.2.3 입력량의 A형 표준불확도

$\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ 의 최적 추정값 즉 평균 \bar{q} 의 분산에 대한 최적 추정값은

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \quad (4.5)$$

로 주어진다.

평균의 실험분산 $s^2(\bar{q})$ 와 평균의 시험표준편차 $s(\bar{q})$ 는 평균 \bar{q} 가 q 의 기대값 μ_q 를 얼마나 잘 추정하는가를 정량적으로 나타내므로 \bar{q} 에 대한 불확도의 척도로 사용할 수 있다.

그러므로 n 개의 독립된 반복관측값 $X_{i,k}$ 로부터 결정된 입력량 X_i 에

대하여, 추정값 $x_i = \bar{X}_i$ 의 표준불확도 $u(x_i)$ 는 식 (4.5)와 (4.4)로부터 다음 식이 된다.

$$u(x_i) = s(\bar{X}_i) = \left[\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (X_{i,k} - \bar{X}_i)^2 \right]^{1/2} \quad (4.6)$$

이렇게 구한 $u^2(x_i) = s^2(\bar{X})$ 와 $u(x_i) = s(\bar{X})$ 는 편의상 각각 A형 분산과 A형 표준불확도라고 부른다.

[주]

관측값의 수 n 은 \bar{q} 가 확률변수 q 의 기대값 μ_q 에 대한 신뢰할 수 있는 추정값을 제공하는 것을 보증할 수 있을 만큼, 또한 $s^2(\bar{q})$ 가 분산 $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ 의 신뢰할 수 있는 추정값을 제공하는 것을 보증할 수 있을 만큼 충분히 커야 한다(4.3.2 [주] 참조). $s^2(\bar{q})$ 와 $\sigma^2(\bar{q})$ 의 차이는 신뢰구간을 설정할 때에는 고려되어야만 한다. 즉, q 의 확률분포가 정규분포이면 이 차이는 t 분포에 의하여 감안된다.

4.2.4 합동시험표준편차가 얻어진 경우의 표준불확도 통계적 관리가 잘 되어 있는 측정의 경우, 측정의 특성을 나타내는 합성이나 합동추정분산값 s_{p^2} (또는 합동시험표준편차 s_p)을 사용할 수 있다. 그런 경우에, 측정량 q 의 값이 m 번의 독립된 관측으로부터 결정될 때, 관측값의 산술평균 \bar{q} 에 대한 시험 분산은 $s^2(\bar{q})/m$ 보다도 s_p^2/m 에 의해서 더 잘 추정되며, 이 때의 표준불확도는 $u = s_p/\sqrt{m}$ 이다.

[주]

합동시험표준편차는 두 개 이상인 모집단분포의 표준편차들이 공통일 경우 각 모집단으로부터 추출된 분포들을 통합하여 구한 공통표준편차의 추정량을 의미한다. 같은 확률변수 또는 측정량 q 에 대하여 동일 시험을 N 번 독립적으로 실시하였을 때 i 번째 시험에서 n_i 번의 독립적으로 반복된 관측값을 얻었다고 하자. 이때, 합동시험분산 s_p^2 는 다음 식으로 주어진다.

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i s_i^2}{\sum_{i=1}^N v_i}$$

여기서 s_i^2 은 식 (4.4)와 같이 i 번째 시험에서 구해지는 시험분산으로서 다음과 같이 계산된다.

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (q_{ij} - \bar{q}_i)^2$$

여기서 q_{ij} 는 i 번째 시험에서의 j 번째 관측값이고

$$\bar{q}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}}{n_i}$$

이다. 또 v_i 는 $n_i - 1$ 로서 시험분산 s_i^2 의 자유도이다. 위에서 구한 합동시험분산 s_p^2 또는 합동시험표준편차 s_p 의 자유도는

$$v = \sum_{i=1}^N v_i \quad \text{이다.}$$

위에서 언급한 N 번의 시험이라 함은 통계적인 관리가 잘 이루어져 유사한 측정결과를 얻을 수 있으나 측정장소, 측정시간, 측정자 등이 다를 경우에 실시된 일련의 시험들을 그 예로 들 수 있다.

4.2.5 맞춤선

흔히 입력량 X_i 의 추정값 x_i 는 최소제곱법에 의해 시험 데이터에 맞추어진 곡선으로부터 얻어지기도 한다. 이 곡선의 특성을 나타내는 파라미터와 예측점의 추정분산과 표준불확도는 잘 알려진 통계적 절차에 의하여 계산될 수 있다.

4.2.6 A형 불확도의 자유도

표준불확도 $u(x_i)$ 의 자유도 v_i 는, $x_i = \bar{X}_i$ 와 $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ 가 4.2.1과 4.2.3에서와 같이 n 개의 독립된 관측값으로부터 계산되는 단순한 경우에 $n - 1$ 이며, A형 불확도성분을 평가하여 보고할 때 꼭 명시해야 한다.

4.2.7 상관관계가 있는 우연변동 측정

만일 어떤 입력량을 관측할 때 우연변동을 일으키는 영향량들이 서로 상관관계가 있으면, 식 (4.3), (4.5)에서와 같은 평균이나 평균의 시험표준편차가 부적합하게 추정될 수 있다. 이런 경우의 관측은 일련의 상관관계가 있는 우연변동 측정을 다룰 수 있는 통계법으로 분석되어야 한다.

4.2.8 시험계획법을 활용한 불확도평가

4.2.1부터 4.2.7까지의 A형 표준불확도평가에 대한 논의에서 모든 것이 다 다루어진 것은 아니며, 통계적 방법으로 처리되어야 하는 더 복잡한 경우가 많이 있다. 중요한 예로서, 게이지블록이나 질량표준기와 같이 값을 모르는 가공물을 값을 아는 교정용 표준기와 비교할 때 단기간 및 장기간의 우연변동으로부터 발생하는 불확도를 평가하기 위하여 최소제공법에 근거한 시험계획을 사용한다. 비교적 단순한 측정인 경우 측정값에 영향을 주는 많은 변량들에 대하여 지분시험법을 사용하며, 얻어진 자료들에 대하여 소위 분산분석이라는 통계적 분석을 통하여 불확도 성분을 산출한다.

4.3 표준불확도의 B형 평가

4.3.1 B형 표준불확도

반복된 관측으로부터 얻어지지 않은 입력량 X_i 의 추정 값 x_i 에 대하여, 관련된 추정분산 $u^2(x_i)$ 혹은 표준불확도 $u(x_i)$ 는 X_i 의 변동성에 관하여 얻을 수 있는 모든 정보에 근거한 과학적 판단에 의해 평가되며, 이에 포함되는 정보는 다음과 같다.

- 과거 측정 데이터
- 관련 재료와 기기의 거동 및 특성에 대한 경험이나 일반지식
- 제작자의 규격
- 교정 및 기타 인증서에 주어진 데이터
- 핸드북에서 인용한 참고자료의 불확도

편의상, 위와 같은 방법으로 평가된 $u^2(x_i)$ 와 $u(x_i)$ 는 각각 B형 분산과 B형 표준불확도라고 한다.

4.3.2 B형 평가의 신뢰성

표준불확도의 B형 평가를 위하여 얻을 수 있는 모든 정보를 적합하게 사용하려면 경험이나 일반지식에 바탕을 둔 통찰력이 필요하며, 이러한 기술은 실습을 통하여 습득된다. 표준불확도의 B형 평가는 A형 평가만큼 신뢰성이 있으며, 특히 A형 평가가 독립된 관측의 회수가 비교적 적을 때 얻어진 경우에서는 더욱 그렇다.

[주]

만일 4.2.3의 [주]에서 q 의 확률분포가 정규분포라고 하면, $\sigma(\bar{q})$ 에 상대적인 $s(\bar{q})$ 의 표준편차 즉, $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ 는 근사적으로 $[2(n-1)]^{-1/2}$ 이다. 따라서 $s(\bar{q})$ 의 불확도로서 $\sigma[s(\bar{q})]$ 를 취하면 $n=10$ 의 관측에 대하여 $s(\bar{q})$ 의 상대 불확도는 24 %가 되고, 또 $n=50$ 의 관측에 대해서는 10 %가 된다 (ISO 지침서 부록 E의 표 E.1 참조).

4.3.3 인용된 불확도

만일 추정값 x_i 가 제작자의 규격, 교정성적서, 핸드북, 혹은 다른 출처로부터 인용되고, 인용된 불확도가 표준편차의 특정 배수라는 것이 언급되어 있다면, 표준불확도 $u(x_i)$ 는 인용된 값을 그 배수로 나눈 값으로 하여야 하고 그 값을 제공하면 추정분산 $u^2(x_i)$ 이 된다.

[예]

명목값 1 kg인 스테레스강 표준분동의 성적서에 질량 값과 불확도가 다음과 같이 명시되어 있다고 하자.

표준분동의 질량 : $m_S = 1\,000.000\,325\text{ g}$

질량값의 불확도 : $U = 240\ \mu\text{g}$ ($3\ \sigma$ 수준)

이 경우 표준분동의 표준불확도는

$u(m_S) = \frac{240 \mu\text{g}}{3} = 80 \mu\text{g}$ 이 되며, 이 값은 상대표준불확도

$\frac{u(m_S)}{m_S} = 80 \times 10^{-9}$ 에 해당된다. 또 추정분산은

$u^2(m_S) = (80 \mu\text{g})^2 = 6.4 \times 10^{-9} \text{g}^2$ 이다.

4.3.4 신뢰수준에 따른 표준불확도

추정값 x_i 의 인용된 불확도가 반드시 표준편차의 배수로 주어지는 것은 아니고, 신뢰수준 90 %, 95 %, 혹은 99 %를 가지는 구간을 정하여 명시해주는 경우도 있다. 달리 명시되어 있지 않으면 정규분포를 사용하여 인용된 불확도를 계산한 것으로 가정하고 인용된 불확도를 정규분포의 적절한 인자로 나누어 x_i 의 표준불확도를 구할 수 있다. 신뢰수준 90 %, 95 %, 99 %에 대응하는 적정인자는 각각 1.64, 1.96, 그리고 2.58이다.

[예]

명목값 10 Ω인 표준저항기의 성적서에 저항값과 불확도가 다음과 같이 명시되어 있다고 하자.

표준저항기의 저항 : $R_S = 10.000\ 742 \Omega \pm 129 \mu\Omega$

신뢰수준 : 99 %

이 경우에 저항기의 표준불확도는

$$u(R_S) = (129 \mu\Omega) / 2.58 = 50 \mu\Omega$$

이 되며, 이에 대응하는 상대표준불확도는

$$u(R_S) / R_S = 5.0 \times 10^{-6} \text{ 이 된다.}$$

4.3.5 신뢰수준 50 % 구간에서 불확도

입력량 X_i 의 값이 a_- 와 a_+ 구간 내에 있을 확률이 50 %라고 판단되는 경우를 생각해 보자. X_i 의 값이 대략 정규분포를 이룬다고 가정하면, X_i 의 최적추정값 x_i 는 그 구간의 중앙점에 있는 것으로 볼 수 있다. 더욱이, 그 구간의 반너비가 $a = (a_+ - a_-) / 2$ 라면, 기대값 μ 와 표준편차 σ 인 정규분포에서 $\mu \pm 0.6745 \sigma$ 구간이 대략 전체의 50 %를 차지하기 때문에, x_i 의 표준불확도는 $u(x_i) = a / 0.6745 = 1.48a$ 가 된다.

[예]

부품의 치수를 결정하는 기계기사가 부품의 길이치수를 10.07 mm부터 10.15 mm 사이에 있을 확률이 0.5라고 추정하여 다음과 같이 보고하였다.

부품의 길이 : $l = (10.11 \pm 0.04) \text{ mm}$

신뢰수준 : 50 %

그러면 $a = 0.04 \text{ mm}$ 이고, l 값들이 정규분포를 이룬다고 가정하면, 그 길이의 표준불확도와 추정분산은 각각 다음과 같다.

$$u(l) = 1.48 \times 0.04 \text{ mm} \approx 0.06 \text{ mm},$$

$$u^2(l) = (1.48 \times 0.04 \text{ mm})^2 = 3.5 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$$

4.3.6 신뢰수준 2β 구간에서 불확도

입력량 X_i 의 값이 a_- 와 a_+ 구간 내에 있을 확률이 약 2/3로 판단되는 경우를 생각해 보자. 이 경우는, 기대값 μ 와 표준편차 σ 인 정규분포에서 $\mu \pm \sigma$ 구간이 대략 전체의 68.3 %를 차지하기 때문에, x_i 의 표준불확도를 근사적으로 $u(x_i) = a$ 로 취할 수 있다.

[주]

만약 확률 $p=2/3$ 에 대응하는 실제의 정규 편차값 0.96742를 사용하면, 즉 $u(x_i) = a / 0.96742 = 1.033 a$ 라고 기술하면 $u(x_i)$ 에는 필요 이상의 의미를 부여하는 것이라 하겠다.

4.3.7 대칭 직사각형 분포

어떤 경우에 입력량 X_i 에 대하여 한계값(상한 및 하한)만의 추정이 가능한 경우가 있다. 특히 X_i 값이 a_- 와 a_+ 구간에 있을 확률이 1이고, 이 구간 밖에 있을 확률이 반드시 0인 경우를 생각해 보자. 만일 그 구간 내에서 X_i 값에 관한 특별한 지식이 없으면, 그 구간 내에는 어디에서나 X_i 가 있을 확률이 같다고 가정할 수밖에 없다(직사각형분포 참조). 그러면 X_i 의

기대값 x_i 는 구간의 중앙점,

$x_i = (a_- + a_+)/2$ 이 되고, 관련된 분산은

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12 \quad (4.7)$$

이다. 만일 $a_+ - a_-$ 를 $2a$ 라고 나타내면, 식 (4.7)은

$$u^2(x_i) = a^2/3 \quad (4.7a)$$

이고, 표준불확도는

$$u(x_i) = a/\sqrt{3} \quad (4.7b)$$

이다.

[예]

1. 핸드북에서 취한 순수 구리의 20 °C에서의 선팡창계수, α_{20} (Cu)의 값과 그의 오차범위가 다음과 같이 간단히 명시되어 있다고 하자.

구리의 열팽창계수 : α_{20} (Cu) = $16.52 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

오차 : $0.40 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 이내

이러한 경우 α_{20} (Cu)의 값은 $16.12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 과 $16.92 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 간격 내에서 어떤 값이든 같은 확률로 될 수 있으며 이 범위 바깥쪽에 있을 확률은 거의 없다고 볼 수 있다.

이 때, 반너비 $a = 0.40 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 인 α_{20} (Cu)의

가능한 값의 대칭 직사각형 분포의 분산은 식 (4.7)에 따라

$$\begin{aligned} u^2(\alpha_{20}) &= (0.40 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})^2/3 \\ &= 53.3 \times 10^{-15} \text{ } ^\circ\text{C}^{-2} \end{aligned}$$

이고, 표준불확도는

$$\begin{aligned} u(\alpha_{20}) &= (0.40 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})/\sqrt{3} \\ &= 0.23 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{aligned} \quad \text{이다.}$$

2. 디지털 전압계(DVM)에 대한 제작자 규격에 “기기 교정 후 1~2년 사

이에 1 V 범위의 정확도는 $(14 \times 10^{-6}) \times \text{측정값} + (2 \times 10^{-6}) \times \text{범위}$ 라고 기재되었다고 하자. 이 기기가 교정된 지 20개월 후 1 V range에서 전위차 V 의 측정에 사용되어 독립적으로 여러 번 반복 측정된 값의 산술 평균이 $\bar{V} = 0.928571 \text{ V}$ 이고, A형 표준불확도가 $u(\bar{V}) = 12 \mu\text{V}$ 이었다고 하자.

제작자의 규격에 관련된 표준불확도는 \bar{V} 에 부가된 보정값 ΔV 의 기대값이 영이고 그 구간 내에 동일한 확률을 가지며 상하대칭인 한계값을 가지고 있다고 가정한 B형 평가로부터 구할 수 있다.

대칭 직사각형분포에서 ΔV 의 가능한 값의 반너비 a 는 다음과 같다.

$$a = (14 \times 10^{-6}) \times (0.928571 \text{ V}) \\ + (2 \times 10^{-6}) \times (1 \text{ V}) = 15 \mu\text{V}$$

식 (4.7)로부터 $u^2(\Delta \bar{V}) = 75 \mu\text{V}^2$ 이고, $u(\Delta \bar{V}) = 8.7 \mu\text{V}$ 가 된다.

측정량 V 의 추정값을 간단히 동일한 기호 V 로 표시하면 $V = \bar{V} + \Delta \bar{V} = 0.928571 \text{ V}$ 로 주어진다. 이 추정값의 합성표준불확도는 \bar{V} 의 A형 표준불확도 $12 \mu\text{V}$ 와 $\Delta \bar{V}$ 의 B형 표준불확도 $8.7 \mu\text{V}$ 를 합성하여 구할 수 있다. 표준불확도를 합성하는 방법은 제 5장에서 예제와 함께 다루었다.

4.3.8 비대칭 직사각형 분포

4.3.7에서 입력량 X_i 의 상한 및 하한 값 a_+ 와 a_- 는 그의 최적추정값 x_i 에 대하여 대칭이 아닐 수도 있다. 좀더 구체적으로 말하면, 하한값이 $a_- = x_i - b_-$ 로, 그리고 상한값이 $a_+ = x_i + b_+$ 로 주어지고, $b_- \neq b_+$ 인 경우이다. 이런 경우에 x_i 가

a_+ 와 a_- 의 값의 중앙에 있지 않기 때문에, X_i 의 확률분포는 그 범위구간에 걸쳐 균일할 수 없다. 그러나 적합한 분포를 선택할 충분한 정보가 없을 수도 있고, 이런 경우에는 선택하는 모델에 따라 분산의 표현 방법도 달라진다. 이렇게 정보가 불충분한 경우 비대칭 직사각형분포에서 가장 간단한 근사법은 온너비 $b_+ + b_-$ 를 갖는 직사각형분포로부터 분산을 구하는 것이다. 즉,

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \quad (4.8)$$

[예]

만일 앞 절 4.3.7의 [예]에서 핸드북에 주어진 구리의 온도계수 값이 다음과 같다고 하자.

구리의 열팽창계수 : $\alpha_{20}(\text{Cu}) = 16.52 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

가능한 최저값 : $16.40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

가능한 최대값 : $16.92 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

이 경우에는 $b_- = 0.12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ 이고 $b_+ = 0.40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ 이다.

이때 표준불확도는 $u(\alpha_{20}) = 0.15 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ 이다.

[주]

1. 한계값이 비대칭인 많은 실제 측정 상황에 있어 X_i 의 새로운 추정값 x_i' 가 한계값들의 중앙점, 즉 $x_i' = (a_- + a_+)/2$ 에 있도록 추정값 x_i 에 크기 $(b_+ - b_-)/2$ 만큼 보정할 수 있다. 이 경우는 4.3.7에서와 같이 새로운 값

$$b_+' = b_-' = (b_- + b_+)/2 = (a_+ - a_-)/2 = a \text{ 를 가진다.}$$

2. 최대 엔트로피 원리에 근거하여, 비대칭인 경우의 확률밀도함수가 $p(X_i) = A \exp[-\lambda(X_i - x_i)]$ 로 나타낼 수 있다. 여기서

$$A = [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]^{-1}$$

$$\lambda = \{ \exp[\lambda(b_- + b_+)] - 1 \} /$$

$$\{ b_- \exp[\lambda(b_- + b_+)] + b_+ \}$$

이다.

따라서 분산 $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - b_-)^2 / \lambda^2$ 가 얻어지며 ; $b_+ > b_-$ 일 때 $\lambda > 0$ 이고 $b_+ < b_-$ 일 때 $\lambda < 0$ 이다.

4.3.9 대칭 사다리꼴 분포

추정범위 a_+ 와 a_- 사이에서 X_i 가 가질 수 있는 값에 대하여 특별한 지식이 없는 경우, 물론 이 범위 밖에 X_i 가 존재할 확률은 0이라 하더라도, 이 범위 안에서는 X_i 가 어떤 값을 가지든지 그 확률이 똑 같다고 가정할 수 밖에 없다는 것은 4.3.7에서 설명하였다. 그러나, 이 경우 총계함수로 인하여 생기는 한계값(a_+ 와 a_-)에서의 불연속성은 종종 자연현상에 부합되지 않는다. 많은 경우에, X_i 가 한계값 근처의 값을 가질 확률은 중앙값 근처의 값을 가질 확률보다 더 낮다고 보는 것이 더욱 현실적이다. 그렇다면, 대칭 직사각형 분포를 대칭 사다리꼴(이등변 사다리꼴) 분포로 대체하는 것이 합리적일 수 있다.

대칭 사다리꼴 분포의 경우 밑너비는 $a_+ - a_- = 2a$ 이고, 윗너비는 $2a\beta$ 이며, 여기서 $0 \leq \beta \leq 1$ 이다. β 가 1에 접근함($\beta \rightarrow 1$)에 따라 이 사다리꼴 분포는 직사각형분포에 접근하게 되고, 반면에 $\beta = 0$ 이면 삼각형 분포가 된다. X_i 에 대하여 사다리꼴 분포를 가정하면, X_i 의 기대값 $x_i = (a_- + a_+)/2$ 이고, 관련된 분산은

$$u^2(x_i) = a^2(1 + \beta^2)/6 \quad (4.9a)$$

임을 알 수 있다. 이것이 삼각형분포에 대하여는 즉, $\beta = 0$ 일 경우에는

$$u^2(x_i) = a^2/6 \quad (4.9b)$$

이 된다.

[주]

1. 기대값 μ , 표준편차 σ 인 정규분포의 경우 $\mu \pm 3\sigma$ 구간에 분포의 약 99.73%가 포함되어 있다. 따라서 만약 상한과 하한, 즉 a_+ 와 a_- 가 100%의 한계가 아니고 99.73% 한계라면, 또 4.3.7에서와 달리 한계 값들 사이에서 X_i 는 근사적으로 정규분포를 이룬다고 가정할 수 있고, 이때 $u^2(x_i) = a^2/9$ 가 된다.

한편 반너비 a 의 대칭 직사각형 분포의 분산은 $a^2/3$ [식 (4.7a)]이고,

반너비 a 인 대칭 삼각형 분포의 분산은 $a^2/6$ [식 (4.9b)] 이다. 이 3종류의 분포들은 필요한 정보의 양에 있어서는 큰 차이가 있지만 분산의 크기들은 매우 비슷하다.

2. 사다리꼴 분포는 두 직사각형 분포를 합성곱(convolution)한 것과 같다. 한 직사각형 분포의 반너비는 사다리꼴의 평균반너비와 같은 $a_1 = a(1 + \beta)/2$ 이며, 다른 한 직사각형 분포의 반너비는 사다리꼴의 한 삼각 부분의 평균너비와 같은 $a_2 = a(1 - \beta)/2$ 이다. 이 분포의 분산은 $u^2 = a_1^2/3 + a_2^2/3$ 이다. 이 합성곱한 분포는, 폭 $2a_1$ 인 직사각형 분포에서 이 폭 자체의 불확도가 폭이 $2a_2$ 인 직사각형분포에 의해 나타내지는 것으로 해석될 수 있다. 따라서 이 분포는 입력량의 한계값이 정확히 알려져 있지 않은 경우의 모델이 된다. 그러나 a_2 가 a_1 의 30% 정도가 되더라도, u 는 $a_1/\sqrt{3}$ 를 5%도 초과하지 않는다.

4.3.10 불확도 성분의 이중 계산

불확도성분을 이중으로 계산하지 않아야 한다. 어떤 효과로 인한 불확도 성분을 B형 평가로 구하는 경우, 관측값의 변동도에 기여하지 않는 부분에 대해서만 합성표준불확도의 계산에 독립된 불확도 성분으로 포함시켜야 한다. 왜냐하면, 관측값의 변동도에 기여하는 부분으로 인한 불확도는 이미 관측값의 통계적 분석으로부터 얻어지는 불확도 성분 속에 포함되었기 때문이다.

4.3.11 정량적 데이터

4.3.3부터 4.3.9까지에 있는 표준불확도의 B형 평가에 대한 논의는 몇 가지 예를 든 것에 지나지 않는다. 더욱이 불확도의 평가는 3.4.1과 3.4.2에서 강조한 바와 같이 가능한 최대 한도로 정량적 데이터에 근거를 두어야 한다.

4.4 표준불확도 평가의 그림 설명

4.4.1 A형 평가의 그림설명

그림 4.1은 X_i 의 확률분포 즉, 반복된 관측에 의해 추출된 X_i 의 가능한 측정값의 미지의 분포로부터 입력량 X_i 의 추정값과 그 불확도의 평가를 나타낸 것이다.

그림 4.1a에 있어서 입력량 X_i 는 온도 t 이고 그의 미지의 분포는 기대값 $\mu_t = 100\text{ }^\circ\text{C}$, 표준편차 $\sigma = 1.5\text{ }^\circ\text{C}$ 인 정규분포라고 가정된 것이다. 이때의 확률밀도함수는 다음과 같다(ISO 지침서 C.2.14 참조).

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(t-\mu_t)^2/2\sigma^2]$$

[주]

확률밀도함수 $p(z)$ 의 정의에 의하면 $\int p(z)dz = 1$ 의 관계가 만족되어야 한다.

그림 4.1b는 그림 4.1a의 분포로부터 무작위 추출하였다고 가정한 온도 t 를 $n = 20$ 회 반복 관측한 t_k 값을 막대그래프로 나타낸 것이다. 이 막대그래프를 만들기 위하여, 표 4.1에 나와 있는 20회의 관측값들이 $1\text{ }^\circ\text{C}$ 폭을 갖는 구간으로 나뉘어져 있다(물론 데이터의 통계해석에는 막대그래프 제작이 필요한 것은 아니다).

식 (4.3)에 따라 계산된 $n = 20$ 회 관측값의 산술평균값 혹은 평균값 \bar{t} 는 $\bar{t} = 100.145\text{ }^\circ\text{C} \approx 100.14\text{ }^\circ\text{C}$ 이고, 이용할 수 있는 데이터에 근거한 t 의 기대값 μ_t 의 최적추정값이라고 가정한다.

식 (4.4)로부터 계산된 시험표준편차 $s(t_k)$ 는 $s(t_k) = 1.489\text{ }^\circ\text{C} \approx 1.49\text{ }^\circ\text{C}$ 이고, 식 (4.5)로부터 계산된 평균값의 시험표준편차 $s(\bar{t})$, 즉 평균값 \bar{t} 의 표준불확도 $u(\bar{t})$ 는 $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k)/\sqrt{20} = 0.333\text{ }^\circ\text{C} \approx 0.33\text{ }^\circ\text{C}$ 이다(나중의 계산을 위하여, 소숫점 아래 자릿수를 유지하는 것이 바람직하다).

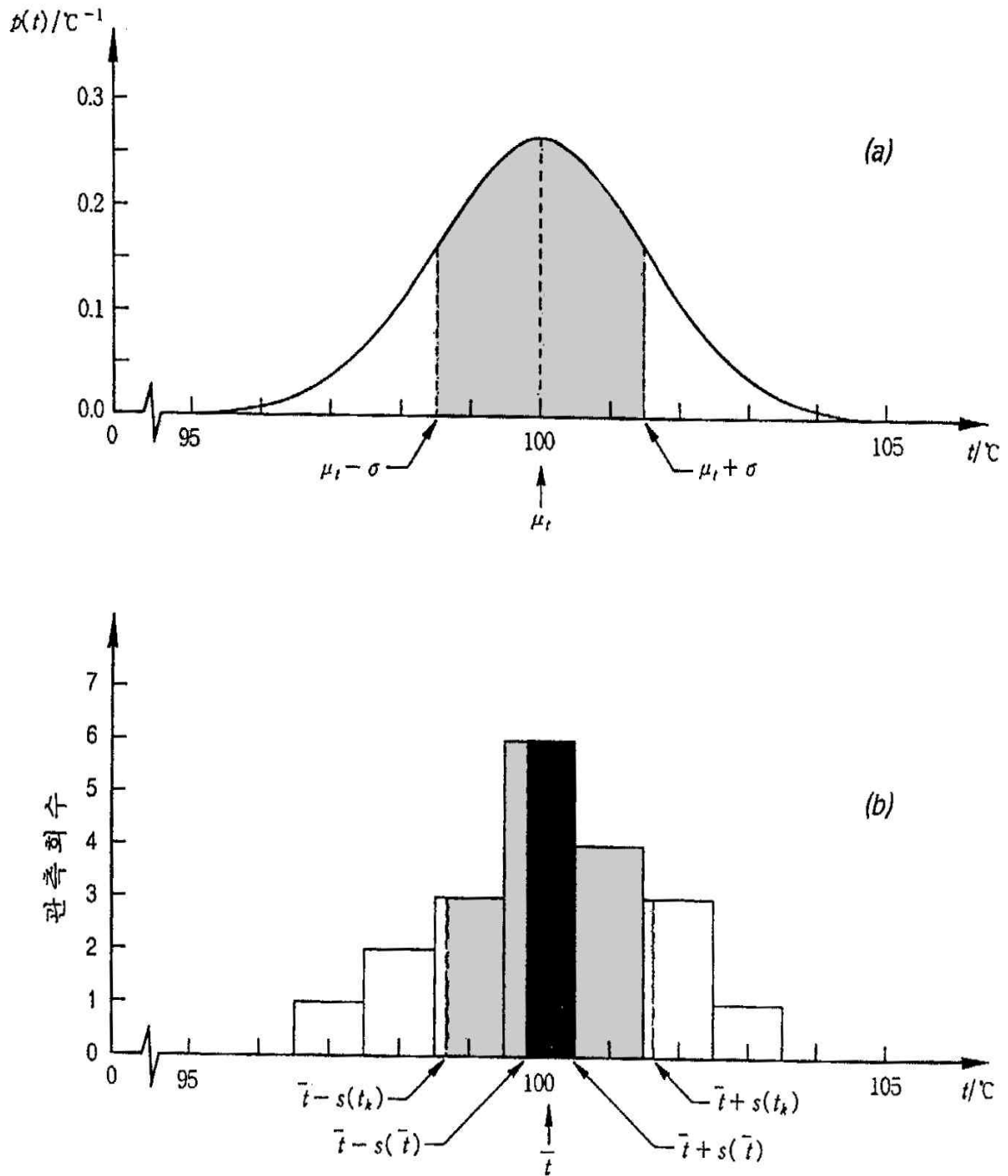


그림 4.1. 반복된 관측으로부터 얻은 입력량의 표준불확도 평가

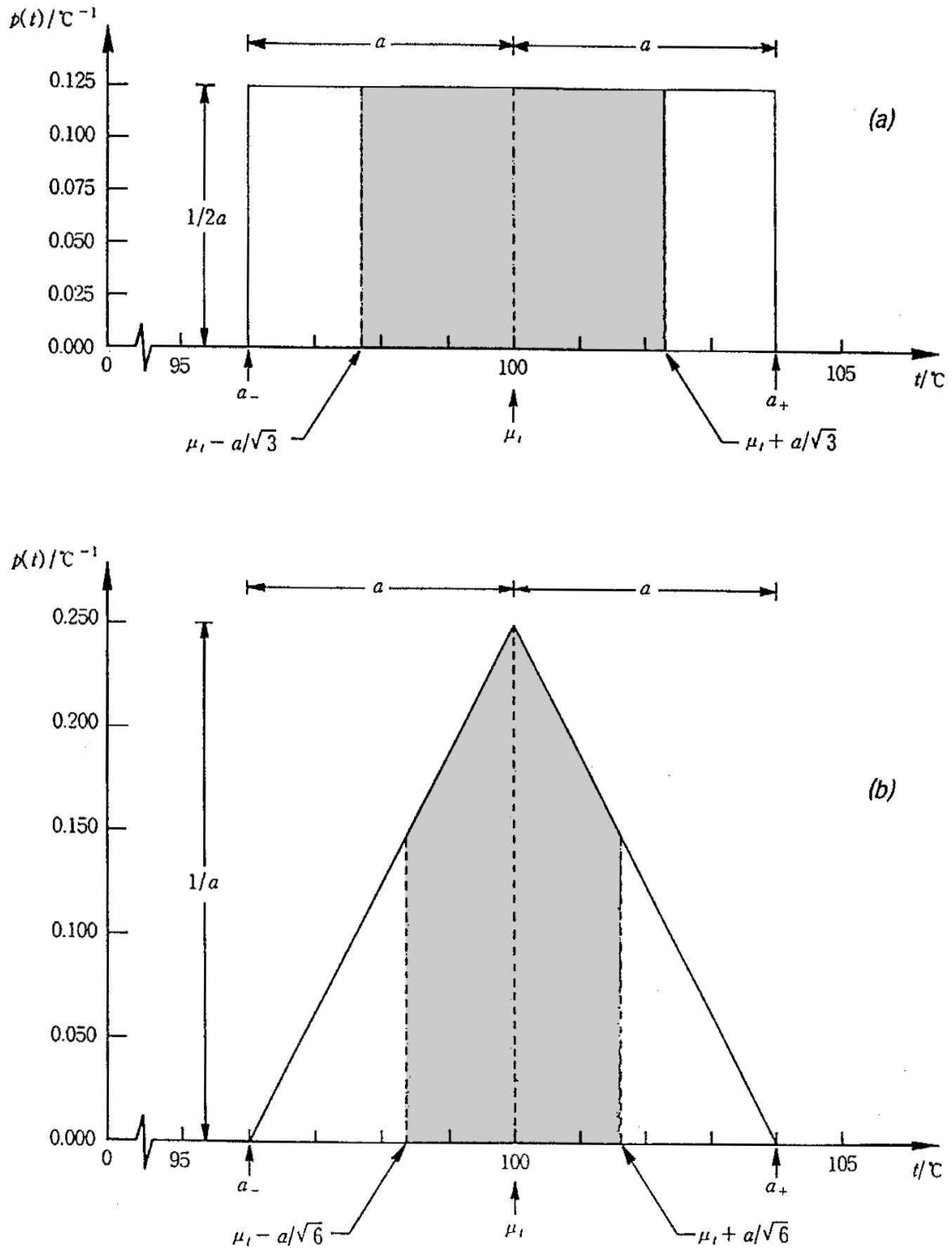


그림 4.2. 선형적 분포로부터 얻은 입력량의 표준불확도 평가

표 4.1 - 1°C 구간으로 묶은 온도 t 의 20회 반복관측값

구 간 $t_1 \leq t \leq t_2$		온 도 $t/^\circ\text{C}$
$t_1/^\circ\text{C}$	$t_2/^\circ\text{C}$	
94.5	95.5	-
95.5	96.5	-
96.5	97.5	96.90
97.5	98.5	98.18; 98.25
98.5	99.5	98.61; 99.03; 99.49
99.5	100.5	99.56; 99.74; 99.89; 100.07; 100.33; 100.42
100.5	101.5	100.68; 100.95; 101.11; 101.20
101.5	102.5	101.57; 101.84; 102.36
102.5	103.5	102.72
103.5	104.5	-
104.5	105.5	-

[주]

고분해능의 디지털 전자온도계가 널리 사용되는 것을 고려하면 표 1의 데이터가 비현실적인 것만은 아니다. 이 데이터는 설명을 위한 목적이며, 반드시 실제의 측정을 기술하는 것으로 볼 필요는 없다.

4.4.2 B형 평가의 그림설명

그림 4.2는 얻을 수 있는 모든 정보에 근거하여, X_i 의 가능한 값의 선형적 분포, 혹은 X_i 의 확률분포로부터 입력량 X_i 의 추정값과 그 불확도 평가를 나타낸 것이다. 여기서 입력량 X_i 는 다시 온도 t 라고 가정하였다.

그림 4.2a는 입력량 t 에 관해 이용할 수 있는 정보가 거의 없고, 하한값 $a_- = 96^\circ\text{C}$, 상한값 $a_+ = 104^\circ\text{C}$ 이며 반너비 $a = (a_+ - a_-)/2 = 4^\circ\text{C}$ 인 선형적 대칭 직사각형 분포에 의해 기술된다고 가정할 수밖에 없다고 하자 (4.3.7 참조). 그러면 t 의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$p(t) = 1/2a, \quad a_- \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0, \quad \text{기타구간}$$

4.3.7과 같이, t 의 최적 추정값은 그의 기대값인

$\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ 이며 이 추정값의 표준불확도는 $u(\mu_t) = a/\sqrt{3} \approx 2.3 \text{ }^\circ\text{C}$ 이다[식(4.7b) 참조].

그림 4.2(b)의 경우 입력량 t 에 관하여 이용할 수 있는 정보가 덜 한정되어 있고 t 가 하한값 $a_- = 96 \text{ }^\circ\text{C}$, 상한값 $a_+ = 104 \text{ }^\circ\text{C}$ 이며 반너비 $a = (a_+ - a_-)/2 = 4 \text{ }^\circ\text{C}$ 인 대칭삼각형분포에 의하여 기술될 수 있다고 가정하자. 그렇게 하면 t 의 확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다(4.3.9 참조).

$$p(t) = (t - a_-)/a^2, \quad a_- \leq t \leq (a_+ + a_-)/2$$

$$p(t) = (a_+ - t)/a^2, \quad (a_+ + a_-)/2 \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0, \quad \text{기타구간}$$

4.3.9에 지적된 바와 같이, t 의 기대값은 $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ 이며 이 추정값의 표준불확도는 $u(\mu_t) = a/\sqrt{6} \approx 1.6 \text{ }^\circ\text{C}$ 이다. 위의 값 $u(\mu_t) = 1.6 \text{ }^\circ\text{C}$ 는 아래의 경우들과 비교해 볼 수 있다.

- (1) 이 절의 앞부분에서처럼 $8 \text{ }^\circ\text{C}$ 의 온 너비를 갖는 직사각형분포로부터 구한 $u(\mu_t) = 2.3 \text{ }^\circ\text{C}$,
- (2) 분포의 99%를 포함하는 -2.58σ 로부터 $+2.58 \sigma$ 까지의 너비가 거의 $8 \text{ }^\circ\text{C}$ 인 정규분포의 $\sigma = 1.5 \text{ }^\circ\text{C}$,
- (3) 정규분포로부터 임의로 취한 20개의 관측값으로부터 4.4.1에서 구한 $u(\bar{t}) = 0.33 \text{ }^\circ\text{C}$ 등

5. 합성표준불확도

측정량의 추정값 y 는 식 (4.2)와 같이 입력량의 추정값 x_1, x_2, \dots, x_N 들의 함수로 표현되기 때문에, y 의 표준불확도는 x_i 의 표준불확도를 적절한 방법으로 합성하여 얻을 수 있다. 이렇게 얻어진 측정량의 추정값 y 의 표준불확도를 합성표준불확도라고 부르고 $u_c(y)$ 로 표현한다. 따라서 합성표준불확도 $u_c(y)$ 는 측정량의 추정값인 y 에 대한 추정 표준편차이다.

합성표준불확도 $u_c(y)$ 는 입력량들이 서로 상관관계가 없는 경우와 있는 경우 즉, 공분산이 0인 경우와 0이 아닌 경우에 각각 다르게 표현될 수 있으므로 각 경우에 대하여 합성표준불확도 $u_c(y)$ 를 구하고자 한다.

5.1 상관관계가 없는 입력량

5.1.1 상관관계가 없는 입력량의 합성표준불확도 입력량 X_1, X_2, \dots, X_N 들이 서로 상관관계가 없는 경우 즉 서로 독립적으로 구하여질 때 합성표준불확도 $u_c(y)$ 는 합성분산인 $u_c^2(y)$ 의 양의 제곱근으로서 아래의 근사식으로부터 구하여 진다.

$$\begin{aligned} u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 \\ &\equiv \sum_{i=1}^N u_i^2(y), \end{aligned} \quad (5.1)$$

여기서 f 는 식 (4.1)과 같은 함수이고, $u(x_i)$ 는 x_i 의 표준불확도이다. 또, $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$ 는 감도계수라고하며, $u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i)$ 이다. $u(x_i)$ 는 입력량의 추정값 x_i 의 표준불확도로서 4.2 또는 4.3에서와 같이 'A형 평가' 또는 'B형 평가'로 구할 수 있다.

일반적으로 식 (5.1)과 입력량들이 서로 상관관계가 있을 때 이에 대응하는 식 (5.8)을 “불확도 전파 법칙”이라고 부른다.

[주]

1. 함수 f 의 근사적인 선형 모형

측정량 Y 에 대한 식 (4.1)을 입력량 X_i 의 명목 값 $X_{i,0}$ 에 대하여 전개하면, 1차 Taylor 전개에 의한 근사식은 다음과 같이 된다.

$$Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + \dots + c_N\delta_N$$

여기서,

$$Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{N,0}),$$

$$c_i = \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \Big|_{X_i = X_{i,0}}, \quad \delta_i = X_i - X_{i,0}$$

이다. 이 근사식은 입력량 X_i 를 δ_i 로 변환하여 측정량과 입력량들 사이의 관계를 선형화한 것으로써, 불확도 분석의 목적으로 사용되는 함수 f 의 근사적인 선형 모형이다(ISO 지침서 E.3.1 참조).

2. 측정량 Y 가 입력량과 처음부터 선형 관계에 있을 경우, 즉

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_NX_N$$

이라면, 합성 분산은 식 (5.1)에 의하여

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) \quad (5.2)$$

로 구해진다.

3. 측정량 Y 의 함수가 $Y = cX_1^{p_1}X_2^{p_2}\dots X_N^{p_N}$ 의 형태로 주어지면 (여기서 p_i 는 알려진 값임), 식 (5.1)을

$$\left[\frac{u_c(y)}{y} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i} \right]^2 \quad (5.3)$$

로 나타낼 수 있다.

이때 $[u_c(y)/y]^2$ 와 $[u(x_i)/x_i]^2$ 를 각각 상대합 성분산과 상대분산이라고 하고, $u_c(y)/|y|$ 와 $u(x_i)/|x_i|$ 를 각각 상대합성표준불확도와 상대표준 불확도라

고 한다.

4. n 차 Taylor 전개식

함수 f 의 비선형성이 클 때에는 식 (5.1)의 합성 표준불확도 표현에 고차 Taylor 전개 항이 포함되어야 한다. 이때 각 x_i 의 분포가 기대값 $E(X_i)$ 에 대하여 대칭이면, 합성분산의 계산에 추가하여야 할 고차 항은 아래와 같다. (5.4)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] \cdot u^2(x_i) u^2(x_j)$$

5.1.2 편도함수에 의한 감도계수

편도함수 $\partial f / \partial x_i$ 는 함수 f 를 X_i 에 관하여 미분하고 기대값 $E(X_i)$ 를 대입한 것이지만 실제로는 추정값 x_i 를 대입하여 구한다. 즉,

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_N} \quad (5.5)$$

이다. 이 편도함수는 x_i 의 변화에 대한 y 의 변화를 나타내는 것이므로 감도계수라고 한다.

감도계수는 식 (5.5)에서

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{(\Delta y)_i}{\Delta x_i} \quad (5.6)$$

의 근사식으로 나타낼 수 있다. 이때 Δx_i 는 x_i 의 작은 변화값이고 $(\Delta y)_i$ 는 이에 대응하는 y 의 변화 값이다. $(\Delta y)_i \approx c_i \Delta x_i$ 이므로 식 (5.1)에 나타난 $u_i(y) = |c_i| u(x_i)$ 는 x_i 에 있어서 $u(x_i)$ 만큼의 변화가 발생하였을 때 이에 대응하는 y 의 변화의 정도를 나타낸다.

일반적으로 감도계수는 식 (5.5)와 같이 해석적인 방법에 의해 구해지지만 5.1.3과 5.1.4에서와 같이 수치적으로 또는 시험적으로 구할 수도 있다.

[예]

1. 4.1.1의 예를 이용하여 소비된 전력 P 의 합성표준 불확도 또는 합성분산을 입력량의 표준불확도로 나타내어 보자. 이때 식 (5.1)을 이용하면 c_i 를

다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_1 = \partial P / \partial V = 2V/R_0[1 + \alpha(t - t_0)] = 2P/V,$$

$$c_2 = \partial P / \partial R_0 = -V^2/R_0^2[1 + \alpha(t - t_0)] = -P/R_0,$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \partial P / \partial \alpha = -V^2(t - t_0)/R_0[1 + \alpha(t - t_0)]^2 \\ &= -P(t - t_0)/[1 + \alpha(t - t_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 &= \partial P / \partial t = -V^2\alpha/R_0[1 + \alpha(t - t_0)]^2 \\ &= -P\alpha/[1 + \alpha(t - t_0)], \end{aligned}$$

그리고, 합성표준불확도는 다음 식으로부터 구해진다.

$$\begin{aligned} u_c^2(P) &= \left[\frac{\partial P}{\partial V} \right]^2 u^2(V) + \left[\frac{\partial P}{\partial R_0} \right]^2 u^2(R_0) \\ &\quad + \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha} \right]^2 u^2(\alpha) + \left[\frac{\partial P}{\partial t} \right]^2 u^2(t) \\ &= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 \\ &\quad + [c_4 u(t)]^2 \\ &= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P) \end{aligned}$$

2. 4.3.7의 [예] 2.에서 전위차 V 의 추정값은 아래와 같다.

$$V = \bar{V} + \Delta \bar{V}$$

여기서 $\bar{V} = 0.928\ 571\ \text{V}$, $u(\bar{V}) = 12\ \mu\text{V}$, 보정값 $\Delta \bar{V} = 0$, $u(\Delta \bar{V}) = 8.7\ \mu\text{V}$ 이다. $\partial V / \partial \bar{V} = 1$, $\partial V / \partial (\Delta \bar{V}) = 1$ 이므로 식 (5.1) 또는 (5.2)에 의하여 합성분산은 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} u_c^2(V) &= u^2(\bar{V}) + u^2(\Delta \bar{V}) = (12\ \mu\text{V})^2 + (8.7\ \mu\text{V})^2 \\ &= 219 \times 10^{-12}\ \text{V}^2 \end{aligned}$$

또한 상대합성표준불확도(5.1.1의 [주] 3 참조) $u_c(V)/V$ 는 16×10^{-6} 이다.

5.1.3 수치적 계산에 의한 감도계수

식 (5.1)에서 $c_i u(x_i)$ 대신에 아래와 같이 구해지는 Z_i 를 대입하여 합성

표준불확도를 구할 수 있다.

$$Z_i = \frac{1}{2} [f(x_1, \dots, x_i + u(x_i), \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_i - u(x_i), \dots, x_N)] \quad (5.7)$$

여기서 Z_i 는 x_i 에 있어서 $+u(x_i)$ 와 $-u(x_i)$ 의 변화에 기인한 추정값 y 의 변화값을 계산하여 구해진다. 또 $u_i(y) = |Z_i|$ 와 $c_i = Z_i/u(x_i)$ 의 관계가 있다.

식 (5.6) 또는 (5.7)에 의하여 감도계수를 수치적으로 계산할 수 있다.

[예]

직사각형으로 된 벽면의 면적(A)을 구하는 문제를 생각하여 보자. 벽면의 너비(W)를 알기 위하여 줄자로 5번 측정한 결과 678, 676, 678, 682, 681 cm이

었다. 벽면의 높이(H)는 한 번 측정하여 435 cm를 얻었고, 이 값으로부터 ± 10 cm를 벗어날 수는 없다고 한다. 벽면의 면적과 이에 대한 불확도는 얼마나 될까?

1. 식 (4.3)과 (4.6)을 이용하면 너비(W)의 최적추정값과 표준불확도는 $w = \bar{W} = 679$ cm, $u(w) = 2.45/\sqrt{5} = 1.1$ cm이다. 높이(H)의 추정값은 435 cm이고, 4.3.7절의 직사각형분포를 이용하면 이의 표준불확도는 $u(h) = 10/\sqrt{3} = 5.8$ cm이고 무한대(∞)의 자유도(6.2.3절 참조)를 갖는다. 따라서 면적에 대한 추정값은

$$a = h \times w = 679 \times 435 \text{ cm}^2 = 295\,365 \text{ cm}^2 \text{이다.}$$

2. 식 (5.6)을 이용하여 감도계수를 구하면 $\Delta h = 0.1$ cm일 때

$$a = 679 \times 435.1 \text{ cm}^2 = 295\,432.9 \text{ cm}^2 \text{이고,}$$

$$\Delta a = 295432.9 - 295365 \text{ cm}^2 = 67.9 \text{ cm}^2 \text{와 } c_h = \Delta a / \Delta h = 679 \text{ cm가 된다.}$$

또 $\Delta w = 0.1$ cm 일 때

$$a = 679.1 \times 435 \text{ cm}^2 = 295\,408.5 \text{ cm}^2 \text{이고,}$$

$$\Delta a = 43.5 \text{ cm}^2 \text{와 } c_w = \Delta a / \Delta w = 435 \text{ cm가 된다.}$$

이는 식 (5.5)에 의해 구한 감도계수 $c_h = \partial a / \partial h = w = 679$ cm,
 $c_w = \partial a / \partial w = h = 435$ cm 와 같다.

3. 식 (5.1)의 우변 항에서

$$\begin{aligned} u_c^2 &= [c_h u(h)]^2 + [c_w u(w)]^2 \\ &= (679 \times 5.8)^2 + (435 \times 1.1)^2 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

가 되고 따라서 합성표준불확도는 $u_c = 3967$ cm²이다.

5.1.4 시험에 의한 감도계수

식 (5.6)의 감도계수 $c_i \approx (\Delta y)_i / \Delta x_i$ 는 함수 f 를 이용하지 않고 시험을 통하여 근사적으로 구할 수 있다. 즉, 시험에서 다른 입력량을 일정하게 고정하고, x_i 의 변화(Δx_i)에 대한 측정량 Y 의 변화값 (Δy)_{*i*}을 시험으로 구하여 감도계수를 근사적으로 얻을 수 있다. 이렇게 구한 감도계수를 사용하면 1차 Taylor 전개식을 시험적으로 결정할 수 있다.

5.2 상관관계가 있는 입력량

5.2.1 상관관계가 있는 입력량의 합성표준불확도

입력량 X_1, X_2, \dots, X_N 들 사이에 상관관계가 존재하면 합성표준불확도 $u_c(y)$ 는 아래와 같이 입력량들의 공분산 항을 포함하여야 한다.

$$\begin{aligned}
u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i, x_j)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

여기서 x_i 와 x_j 는 입력량 X_i 와 X_j 의 추정치이며, $u(x_i, x_j)=u(x_j, x_i)$ 는 x_i 와 x_j 에 관련된 공분산의 추정값이다(5.2.3, 5.2.4, 5.2.5 참조). 또 c_i 는 식 (5.1) 또는 (5.5)에 있는 감도계수이다.

5.2.2 추정 상관계수에 의한 합성표준불확도

두 변수 x_i 와 x_j 사이의 상관관계의 정도는 추정된 상관계수로서 나타낼 수 있으며 이 추정상관계수는

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{5.9}$$

로 주어진다.

여기서 $r(x_i, x_j)=r(x_j, x_i)$, $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq 1$ 이다. 만약 추정값 x_i 와 x_j 가 독립이라면, $r(x_i, x_j)=0$ 이며, 이는 한 추정값의 변화에 의하여 다른 추정값의 변화를 기대할 수 없다는 것을 의미한다.

또한, 상관계수를 사용하면 식 (5.8)은

$$\begin{aligned}
u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^N c_i^2 u(x_i)^2 \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

가 된다.

[주]

1. 모든 변수들이 서로 두 변수 사이에 $r(x_i, x_j)=+1$ 인 관계에 있다면, 식 (5.10)의 합성분산은

$$u_c^2(y) = \left[\sum_{i=1}^N c_i u(x_i) \right]^2 = \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2 \quad (5.11)$$

가 된다. 따라서 합성표준불확도 $u_c(y)$ 는 각 입력량의 추정값인 x_i 의 표준불확도에 의하여 발생하는 출력량의 추정값 y 의 변화량을 나타내는 항, 즉 $c_i u(x_i)$ 들의 선형합이다.

2. 수치적으로 계산되어지는 5.1.3의 Z_i 를 사용하여 식 (5.10)을 표현하면

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Z_i Z_j r(x_i, x_j) \quad (5.12)$$

가 된다.

3. 측정량 Y 가 5.1.1의 [주] 3과 같은 형태의 함수로 주어지고, X_i 들이 서로 상관관계가 있을 때의 합성분산은

$$\begin{aligned} \left[\frac{u_c(y)}{y} \right]^2 &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i} \right]^2 \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i} \right] \left[\frac{p_j u(x_j)}{x_j} \right] r(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (5.13)$$

로 주어진다.

[예]

1. $R_i = 1000 \Omega$ 의 명목값을 지닌 10개의 저항기가 교정성적서 상에 $u(R_s) = 100 \text{ m}\Omega$ 의 표준불확도를 지닌 1000Ω 의 표준저항기 R_s 와 비교하여 교정되며 비교측정시의 불확도는 무시된다고 하자. 도선저항이 무시할 수 있을 정도로 작은 도선을 이용하여 10개의 저항기들을 직렬로 연결함으로써 명목값 $10 \text{ k}\Omega$ 의 교정용 표준저항 R_{ref} 를 구성하였다.

따라서 $R_{ref} = f(R_i) = \sum_{i=1}^{10} R_i$ 가 된다. 저항기의 각 쌍에 대하여

$r(x_i, x_j) = r(R_i, R_j) = +1$ 이기 때문에 식 (5.11)이 적용된다(ISO 지침서 F.1.2.3 예제 2 참조). 각 저항기에 대하여

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial R_{ref}}{\partial R_i} = 1$$

이고 $u(x_i) = u(R_i) = u(R_s)$ 이므로 이 식으로부터 R_{ref} 의 합성표준

불확도는

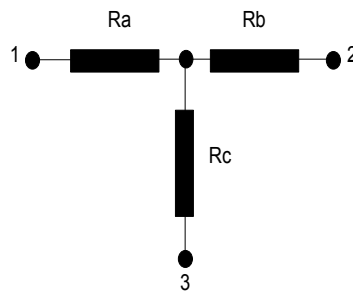
$$u_c(R_{ref}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_s) = 10 \times (100 \text{ m}\Omega) = 1 \text{ }\Omega$$

이 된다. 만약 식 (5.1)에 의해 합성표준불확도를

$$u_c(R_{ref}) = \left[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_s) \right]^{1/2} = 0.32 \text{ }\Omega$$

로 구한다면, 10개의 저항기들의 모든 교정값들이 서로 상관관계가 있다는 것을 고려하지 않았기 때문에 틀린 결과를 얻게 된다.

2. 고저항 측정기는 교정 완료된 여러 개의 고저항 표준기를 사용하여 교정한다. 그러나 안정도가 우수하고 온도계수 및 전압계수가 낮은 고저항 표준기를 마련한다는 것은 어렵다. 따라서 안정도가 좋은 저저항기들을 그림과 같이 조합 구성하여 사용할 수 있으며,



이러한 고저항기는 3-단자(terminal) 표준기로서 취급된다.

단자 “1” 및 “2”는 coaxial screened connectors의 심선을 의미하고 단자 “3”은 screen에 연결된다. 따라서 단자 “1”과 “2” 사이의 transfer resistance는

$$R = \frac{R_a \cdot R_b}{R_c} + R_a + R_b$$

이다. 일반적으로 R_a 및 R_b 는 같은 명목값을 지니고 있고, R_c 는 이 저항값보다 최소한 1/10 이하가 되어야 한다. R_a 와 R_b 는 동일한 표준기에 대하여 각각 교정이 된다. 그러므로 교정에 의한 각각의 불확도 성분들은 서로 상관관계가 있게 된다. 만일 이 표준기가 실제 값보다 약간 더 큰 값을 가지고 있다면, R_a 및 R_b 도 성적서에 나타난 값보

다 실제적으로 더 큰 값을 지니게 된다. 이러한 오차는 본래의 표준기
에서와 같은 비율로 증감할 것이다.

측정모델로부터

$$R = \frac{R_a \cdot R_b}{R_c} + R_a + R_b$$

이고, 따라서 감도계수는

$$\frac{\partial R}{\partial R_a} = \frac{R_b}{R_c} + 1 = c(R_a),$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_b} = \frac{R_a}{R_c} + 1 = c(R_b),$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_c} = -\frac{R_a R_b}{R_c^2} = c(R_c) \quad \text{이다.}$$

예로서 $R_a = R_b = 10^{10} \Omega$, $u = 0.25\%$, 자유도 $v(R_a) = v(R_b) = 30$, 즉
 $u(R_a) = u(R_b) = 2.5 \times 10^7 \Omega$, $R_c = 10^6 \Omega$, $u = 0.0025\%$ 자유도
 $v(R_c) = 30$, 즉 $u(R_c) = 25 \Omega$ 라고 한다면

$$\begin{aligned} R &= \frac{(1 \times 10^{10} \times 1 \times 10^{10})}{1 \times 10^6} + (1 \times 10^{10}) + (1 \times 10^{10}) \\ &= 1.0002 \times 10^{14} \Omega \end{aligned}$$

이 되고 감도계수는

$$c(R_a) = (10^{10}/10^6) + 1 = 1.0001 \times 10^4,$$

$$c(R_b) = (10^{10}/10^6) + 1 = 1.0001 \times 10^4,$$

$$c(R_c) = -(10^{10})(10^{10})/(10^6)(10^6) = -1 \times 10^8$$

이다. 이미 언급한바와 같이 R_a 와 R_b 의 불확도 성분들이 상관관계
가 있으며 직관적으로 상관계수는 1이다. 또 R_a 와 R_c , R_b 와 R_c 는
서로 상관관계가 없기 때문에 상관계수는 0이다.

따라서 식 (5.10)을 이용하여 합성분산을 구하면

$$\begin{aligned}
u_c^2(R) &= c^2(R_a)u^2(R_a) + c^2(R_b)u^2(R_b) \\
&\quad + c^2(R_c)u^2(R_c) \\
&\quad + 2c(R_a)c(R_b)u(R_a)u(R_b) \\
&= (1.0001 \times 10^4)^2 (2.5 \times 10^7)^2 \\
&\quad + (1.0001 \times 10^4)^2 (2.5 \times 10^7)^2 \\
&\quad + (-1 \times 10^8 \times 25)^2 + 2 \times (1.0001 \times 10^4) \\
&\quad \times (2.5 \times 10^7) \times (1.0001 \times 10^4) \times (2.5 \times 10^7) \\
&= 25.005 \times 10^{22} + 625 \times 10^{16} \quad \Omega^2
\end{aligned}$$

이고 합성표준불확도는 $u_c(R) = 5.0006 \times 10^{11} \Omega$ 가 된다.

5.2.3 공분산의 A형 평가

두 확률변수 q 와 r 의 기대값 μ_q 와 μ_r 을 추정하는 두 산술평균 \bar{q} 와 \bar{r} 을 생각하여 보자. \bar{q} 와 \bar{r} 은 같은 측정조건 하에서 q 와 r 한 쌍씩 동시에 얻어진 n 쌍의 서로 독립적인 반복 관측값으로부터 구하여 진다. 이때 공분산 $cov(q, r)$ 은

$$s(q_i, r_i) = \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})(r_i - \bar{r}) / (n-1)$$

에 의하여 추정될 수 있으므로, \bar{q} 와 \bar{r} 에 대한 추정공분산은

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r}) \quad (5.14)$$

가 된다. 사실 관측값들이 상관관계가 없는 경우 공분산을 계산하면 거의 0이 된다.

두 개의 입력량 X_i 와 X_j 에 대해 같은 측정조건 아래서 얻은 n 쌍의 독립적인 관측값을 각각 $(X_{i1}, X_{j1}), (X_{i2}, X_{j2}), \dots, (X_{in}, X_{jn})$ 라고 하자. 이 관측값으로부터 상관관계가 있는 두 개의 입력량 X_i 와 X_j 는 산술평균 \bar{X}_i 와 \bar{X}_j 에 의하여 추정되고, \bar{X}_i 와 \bar{X}_j 의 추정공분산 $u(x_i, x_j)$ 은

식 (5.14)에 의하여 $s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ 로 주어진다. 또 \bar{X}_i 와 \bar{X}_j 의 추정 상관계수는 식 (5.9)로부터 얻어지며, $r(x_i, x_j) = r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j) / s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)$ 이다.

5.2.4 추가 입력량의 도입에 의한 공분산 평가

실제로, 상당한 표준불확도를 가지는 동일한 측정기기, 표준기, 참고자료, 또는 측정방법 등을 사용하여 두 개의 입력량을 결정하는 경우에는 두 입력량 사이의 상관관계는 매우 클 것이다. 예를 들면 하나의 온도계를 사용하여 입력량 X_i 와 X_j 의 값을 추정하는데 필요한 온도보정을 하는 경우, 두 입력량 사이의 상관관계는 아주 크다고 할 수 있다. 이 경우의 X_i 와 X_j 를 보정하지 않는 양들로 다시 바꾸어 정의를 하고, 온도계의 교정곡선을 정의하는 양들을 서로 독립적인 표준불확도를 갖는 추가 입력량으로 도입하여 측정모델에 포함시키면, X_i 와 X_j 간의 상관관계는 없어지게 된다(아래 [예] 3 참조).

입력량의 공분산은 이들에 영향을 주는 또 다른 변량들의 불확도를 이용하여 추정할 수도 있다. 두 입력량을 편의상 X_1 과 X_2 라고 하고 이들에 대한 추정값을 각각 x_1 과 x_2 라고 하자. 또 두 입력량은 서로 독립적인 변수인 Q_1, Q_2, \dots, Q_L 에 의존한다고 하자. 그러면 두 입력량은 식 (4.1)과 같이 $X_1 = F(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$, $X_2 = G(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$ 로 표현될 수 있다. 임의의 변수 Q_i 는 함수 F 에는 포함되지만 함수 G 에는 포함되지 않을 수도 있다. 여기서 $u^2(q_i)$ 을 Q_i 의 추정값인 q_i 에 대한 추정분산이라 하면, 식 (5.1)로부터 x_1 과 x_2 의 추정분산과 추정공분산을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u^2(x_1) &= \sum_{i=1}^L \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \right]^2 u^2(q_i), \\ u^2(x_2) &= \sum_{i=1}^L \left[\frac{\partial G}{\partial q_i} \right]^2 u^2(q_i), \\ u(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^L \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} u^2(q_i) \end{aligned} \quad (5.15)$$

위의 식에서 보듯이 $\partial F / \partial q_1 \neq 0$ 이고, $\partial G / \partial q_1 \neq 0$ 인 항들만 공분산에 기여하므로, 함수 F와 함수 G 사이에 공통 변량이 존재하지 않는다면 x_1 과 x_2 의 공분산은 0이 된다.

식 (5.9)과 (5.15)를 이용하면 추정상관계수 $r(x_1, x_2)$ 를 구할 수 있다. 두 입력량에 대한 추정공분산은 식 (5.14)와 같은 통계적인 성분과 함께 위와 같은 성분을 동시에 포함할 수도 있다.

[예]

1. 표준저항기 R_s 가 전류 I 및 온도 t 를 결정하기 위한 동일한 측정에서 사용되었다고 하자. 전류는 이 표준저항기의 양단에 걸린 전위차 (V_s)를 디지털 전압계를 이용하여 측정함으로써 결정되고, 온도는 저항 브리지와 이 표준저항기를 사용하여 교정된 저항식 온도식 온도 센서의 저항 $R_t(t)$ 를 측정하여 결정된다. 이 온도센서의 온도-전기저항의 관계는 $15^\circ\text{C} \leq t \leq 30^\circ\text{C}$ 의 범위에서 $t = aR_t^2(t) - t_0$ 이다. 여기서 a 와 t_0 는 알고 있는 상수이다. 따라서 전류는 $I = V_s/R_s$ 의 관계로부터, 온도는 $t = a\beta^2(t)R_s^2 - t_0$ 에 의해 결정된다.

여기서 $\beta(t)$ 는 브리지에 의한 측정과정에서 주어지는 측정비 $R_t(t)/R_s$ 를 의미한다.

저항값 R_s 가 전류 I 와 온도 t 의 식에 공통으로 존재하기 때문에 I 와 t 의 공분산은 식 (5.15)의 세번째 식으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u(I, t) &= \frac{\partial I}{\partial R_s} \frac{\partial t}{\partial R_s} u^2(R_s) \\ &= \left[-\frac{V_s}{R_s^2} \right] (2a\beta^2(t)R_s) u^2(R_s) \\ &= -\frac{2I(t+t_0)}{R_s^2} u^2(R_s) \end{aligned}$$

공분산의 값은 입력량 I , t 의 측정값, 표준저항기 (R_s)의 값 그리고 교정검사서에 표시된 $u(R_s)$ 를 대입하여 결정된다. 상대분산 $[u(R_s)/R_s]^2$ 의 차원이 1(무차원 양이라고 함)이기 때문에 $u(I, t)$ 의 단위는 분명히 A

· °C이다.

2. 5.2.2의 [예] 1에서, 각 저항기의 교정을 $R_i = a_i R_s$ 로 나타내고, $u(a_i)$ 를 반복관측으로 얻은 측정비 a_i 의 표준불확도라고 하자. 또한 각 저항기에 대하여 $a_i \approx 1$ 이라 하고, $u(a_i)$ 는 각 저항기의 교정에 있어서 본질적으로 동일하다고 보아 $u(a_i) \approx u(a)$ 라고 하자. 그러면 식 (5.15)를 사용하여 $u^2(R_i) = R_s^2 u^2(a) + u^2(R_s)$ 와 $u(R_i, R_j) = u^2(R_s)$ 를 얻을 수 있다. 이 사실은 5.2.2절의 식 (5.9)에 의해 임의의 두 저항기($i \neq j$)의 상관계수는

$$r(R_i, R_j) \equiv r_{ij} = \left[1 + \left\{ \frac{u(a)}{u(R_s)/R_s} \right\}^2 \right]^{-1}$$

이 됨을 의미한다. $u(R_s)/R_s = 10^{-4}$ 이기 때문에, 만약 $u(a) = 10^{-4}$ 이면 $r_{ij} \approx 0.5$ 가 되고, $u(a) = 10^{-5}$ 이면 $r_{ij} \approx 0.990$, $u(a) = 10^{-6}$ 이면 $r_{ij} \approx 1.000$ 이 된다. 따라서, $u(a) \rightarrow 0$ 함에 $r_{ij} \rightarrow 1$, $u(R_i) \rightarrow u(R_s)$ 가 된다.

[주]

일반적으로, 위의 예와 같은 비교 교정에 있어서 피교정기기의 추정값은 서로 상관되어 있는데, 그 상관정도는 비교측정의 불확도와 교정용 표준기의 불확도의 비에 관련되어 있다. 많은 실제의 경우처럼, 비교측정의 불확도가 사용된 표준기의 불확도에 비하여 무시할 수 있는 경우라면, 상관계수는 +1이 되고, 각 피교정기기의 불확도는 표준기의 불확도와 같게 된다.

3. 위의 [예] 1에서 측정량 P 가 두 개의 입력량인 전류 I 와 온도 t 에 의해 다음과 같이 결정된다고 하자.

$$P = \frac{C_0 I^2}{(T_0 + t)}$$

여기서 C_0 와 T_0 는 알고 있는 상수 값으로 이들의 불확도는 매우 작아 무시된다고 하자

[$u^2(C_0) \approx 0$, $u^2(T_0) \approx 0$]. 이 식에 두 입력량 I 와 t 를 대입하여 측정량 P 를 다시 표현하면

$$P = \frac{C_0 V_s^2}{R_s^2 [T_0 + a\beta^2(t) R_s^2 - t_0]}$$

가 되며 이때에는 I 와 t 의 상관관계를 구하는 문제가 없어지게 된다. R_s , V_s , β 가 서로 상관관계가 없는 입력량이므로 식 (5.1)에 의해 합성 불확도를 구할 수 있다.

두 개 이상의 입력량 X_i 에 공통적으로 영향을 주는 변량 Q_i 을 독립적인 추가입력량으로 포함시켜서 본래의 입력량 X_1, X_2, \dots, X_N 들을 다시 정의한다면 공분산 $u(x_i, x_j)$ 를 고려할 필요는 없어지게 된다.(변량 Q_i 과 영향받은 입력량 X_i 사이의 관계를 완전히 설정하기 위해서는 추가로 측정을 해야할 필요성이 생길 수도 있다.) 그럼에도 불구하고, 입력량의 숫자를 증가시키는 것보다는 공분산을 구하는 것이 더 편리한 경우도 있다. 한 쌍씩 동시에 얻어진 n 쌍의 반복 관측값의 공분산(식 (5.14) 참조)에 대하여도 이와 같은 방법을 적용할 수 있지만, 적절한 추가입력량을 확인하고 설정하는 것이 종종 임시방편적이거나 부자연스러울 수도 있다.

5.2.5 시험에 의한 공분산 평가

시험에서 나타난 두 입력량 사이의 변화의 정도를 이용하여 공분산을 근사적으로 추정할 수도 있다.

두 변수의 추정치를 x_i 와 x_j 라고 하고 x_i 가 δ_i 만큼 변할 때 상대적으로 x_j 는 δ_j 만큼 변한다고 하자. 그러면 두 변수 x_i 와 x_j 의 상관계수의 추정치는

$$r(x_i, x_j) \approx u(x_i)\delta_j / u(x_j)\delta_i \quad (5.16)$$

로 근사적으로 구할 수 있다. 위 식 (5.16)과 (5.9)을 이용하면 추정공분산도 쉽게 구할 수 있다. 또 상관계수를 알고 있는 경우에는 식 (5.16)을 이용하여 두 변수의 변화의 관계도 계산할 수 있다.

5.2.6 공분산의 B형 평가

변량들의 상관 변동도에 관한 정보를 이용하여 두 변수간의 공분산을 추정할 수도 있는데 이런 방법을 “B형 공분산 평가”라고 한다. 특히 온도, 기압, 습도 등의 공통 영향효과로 인한 입력량들의 상관관계를 추정하고자 할 때는 경험이나 일반적인 상식에 근거한 통찰력이 더욱 요구되어진다.

대개 이런 효과들은 매우 작은 상호 의존성을 가지며, 영향을 받은 입력량들도 서로 상관관계가 없다는 가정을 하게 된다. 그렇지만 만약 상관관계를 무시할 수 없는 경우에는 5.2.4와 같은 방법으로 공통효과를 독립적인 추가입력량으로 도입하여 해결할 수 있다.

6. 확장불확도

6.1 서 론

6.1.1 ISO에서 발행한 측정불확도 표현 지침서 (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)의 기초가 된 불확도표현작업반의 권고안 INC-1(1980)과, 이를 승인하고 재확인해 준 국제도량형위원회(CIPM)의 권고안 1(CI-1981) 및 1 (CI-1986) (ISO 지침서 A.2와 A.3 참조)은 측정결과의 불확도를 정량적으로 표현하는 파라미터로서 합성표준불확도의 사용을 추천하였다. 사실 CIPM은 그 두 번째 권고안 1(CI-1986)에서 “CIPM과 자문위원회의 주관하에 이루어지는 모든 국제 비교나 기타 다른 작업들의 결과를 보고하는데 모든 참여자”는 현재 합성표준불확도라고 부르는 $u_c(y)$ 를 사용하여야 한다고 요구하였다.

6.1.2 측정결과의 불확도를 표현하는데 보편적으로 합성표준불확도 $u_c(y)$ 를 사용할 수 있지만 상업이나 산업 분야의 특정한 경우, 또는 규제에 적용할 경우, 보건과 안전에 관련될 경우에는 측정량의 합리적인 추정값이 이루는 분포의 대부분을 포함할 것으로 기대되는 측정결과 주위의 어떤 구간을 정의해 줄 수 있는 불확도의 척도가 종종 필요하다. 작업반은 이런 요구를 인식하여 권고안 INC-1(1980)의 제5항을 제정하였다. 또 그것은 CIPM의 권고안 1 (CI-1986)에 반영되었다.

6.2 확장불확도

6.2.1 확장불확도와 포함인자

6.1.2절에서 설명한 성격의 구간에 대한 요구조건을 충족시키는 불확도의

추가적인 척도를 확장불확도라고 하며 이를 U 라고 표현한다. 확장불확도 U 는 합성표준불확도 $u_c(y)$ 에 포함인자 k 를 곱하여 결정된다 (6.3 참조).

$$U = ku_c(y) \quad (6.1)$$

따라서, 측정결과는 $Y = y \pm U$ 로 간단하게 표현된다.

이 표현이 나타내는 것은 측정량 Y 에 대한 최적의 추정값은 y 이고, Y 값이 이루는 분포의 대부분이 $y - U$ 에서 $y + U$ 까지의 구간에 포함될 것으로 기대된다는 것이다. 또 이 구간은 $y - U \leq Y \leq y + U$ 로 표현하기도 한다.

포함인자 k 의 값은 $y - U$ 에서 $y + U$ 까지의 구간이 요구하는 신뢰수준에 따라 선택된다. 일반적으로 k 는 2에서 3사이의 값을 가지지만 경우에 따라 이 범위를 벗어날 수도 있다. 이 k 의 값을 적절하게 선택할 수 있으려면 측정결과를 사용해본 경험이 많고 이 측정결과가 쓰여지는 용도에 대하여 완전한 지식이 있어야 한다(포함인자를 구하는 방법은 6.2.4 참조).

[주]

1. 양쪽 신뢰구간

T_1 과 T_2 가 관측값의 두 함수이고, θ 가 추정하려고 하는 모집단 파라미터일 때, 확률 $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ 가

적어도 $(1-\alpha)$ 가 된다면, 즉 $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2) \geq (1-\alpha)$ 라면, T_1 에서 T_2 까지의 구간을 θ 에 대한 $(1-\alpha)$ 양쪽 신뢰구간이라 한다. 여기서 $(1-\alpha)$ 는 0과 1 사이의 값이다. 또한 $(1-\alpha)$ 를 신뢰수준 또는 신뢰계수라고 한다.

2. 한쪽 신뢰구간

T 가 관측값의 함수이고, θ 가 추정하려고 하는 모집단 파라미터일 때, 확률 $\Pr(T \geq \theta)$ [또는 확률 $\Pr(T \leq \theta)$]가 적어도 $(1-\alpha)$ 가 된다면, θ 가 가질

수 있는 가장 작은 값에서부터 T 까지의 구간 [또는, T 부터 θ 가 가질 수 있는 가장 큰 값까지의 구간]을 θ 에 대한 $(1-\alpha)$ 한쪽 신뢰구간이

라 한다.

3. 계통효과에 대한 알고 있는 보정값을 보고된 측정결과에 적용하지 않고, 그 대신 측정결과에 부여한 “불확도”를 크게 잡아줌으로써 그 효과를 반영시키려고 하는 경우를 볼 수 있다. 그러나 이것은 피해야 하며, 매우 특별한 경우에만 알고있는 상당한 계통효과에 대한 보정을 측정결과에 적용하지 않아도 된다(특별한 경우 이 문제를 다루는 방법에 대해서 ISO F.2.4.5 참조). 측정결과의 불확도 평가는 어떤 양에 안전 한계값을 부여하는 것과 혼동되어서는 안된다.

6.2.2 포함확률 또는 신뢰수준

6.2.1의 [주]에서 설명한 신뢰구간과 신뢰수준은 통계학에서 명확히 정의하여 사용하는 용어이며, 이것을 U 에 의하여 정의된 구간에 적용할 수 있기 위해서는 몇 가지 조건을 만족해야하는데 그 중에 하나가 $u_c(y)$ 에 기여하는 불확도의 모든 성분들이 A형 평가에 의하여 구해져야 한다는 것이다. 따라서 이 지침서에서 U 에 의해 정의된 구간을 언급할 때, “신뢰(confidence)”라는 용어는 “구간(interval)”이라는 용어를 수식하는데 사용해서는 안된다. 그리고 “신뢰수준(confidence level)”은 U 에 의해 정의된 구간과 관련되어 사용되지 않고 대신에 “신뢰의 수준(level of confidence)”이라는 용어가 그 구간과 관련되어 사용된다.

좀 더 구체적으로 말하면, U 는, 어떤 측정결과에 대하여, 측정결과와 그 합성표준불확도로 특성 지어지는 확률분포의 대부분(P)을 포함하는 한 구간을 정의하는 것으로 본다. 여기서 P 는 포함확률 또는 그 구간의 신뢰의 수준(level of confidence of the interval)이라 하며 통계학에서 정의된 신뢰수준(confidence level)과는 구별된다. 그러나 측정분야에서 신뢰수준이란 용어가 이미 널리 보급되어 있기 때문에 이 지침서에서는 신뢰수준이라는 용어를 그대로 사용하였으며, 특별한 언급이 없는 한 포함확률 또는 구간의 신뢰의 수준(level of confidence)을 의미한다.

[주]

1. 실제적으로 가능한 경우는 반드시 U 에 의해 정의된 구간에 대한 신뢰수준 P 를 추정하여 명시해 주어야한다. $u_c(y)$ 에 상수를 곱하는 것은 새로운 정보를 주기 위한 것이 아니라 기존의 유용한 정보를 다른 형태로 나타낸 것임을

알아야 한다. 그러나 대부분의 경우에, y 와 $u_c(y)$ 에 의해 특성 지어지는 확률 분포에 대한 제한된 정보(특히 양극단 부분) 또는 $u_c(y)$ 자체의 불확도 때문에, 신뢰수준 P (특히 1에 가까운 값일 경우)가 다소 불확실하다는 것을 알아야 한다(6.2.1의 [주] 3., ISO 지침서 2.3.5 note 2와 G; 특히 G.6.6 참조).

2. 이상적으로는 95%나 99%와 같은 특정 신뢰수준 P 에 대응하는 구간 $Y = y \pm U = y \pm ku_c(y)$ 를 정해 주는 포함인자 k 의 값을 선택할 수 있거나, 또는 이와 같은 내용으로 k 의 값이 주어졌을 때 그 구간에 대응하는 신뢰수준을 명확하게 말할 수 있기를 원한다. 그러나 실제로 이 일은 쉽지가 않다. 왜냐하면 그러기 위해서는 측정결과 y 와 합성표준 불확도 $u_c(y)$ 에 의하여 특성 지어지는 확률분포에 대하여 아주 잘 알아야 하기 때문이다. 비록 이들이 매우 중요한 파라미터들이지만 정확하게 주어진 신뢰수준에 대응하는 구간을 결정하는데는 이들만으로는 충분하지 않다.

6.2.3 유효자유도

포함인자 k 를 구하기 위해서는 합성표준불확도 $u_c(y)$ 의 유효자유도를 추정하여야 하는데 이 유효 자유도를 v_{eff} 라고 표현한다. 이 유효자유도는 합성표준불확도 $u_c(y)$ 가 측정량 Y 의 표준편차를 얼마나 잘 추정하는가를 나타내는 것으로서 '합성표준불확도의 불확도 척도'라고 할 수 있다.

[주]

유효자유도가 10보다 크면 합성표준불확도 $u_c(y)$ 의 불확도는 무시할 수 있을 정도가 된다.

유효자유도를 구하는 방법은 다음과 같이 요약할 수 있다.

아래의 Welch-Satterthwaite 공식을 이용하여 $u_c(y)$ 의 유효자유도 v_{eff} 를 추정한다.

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{[c_i u(x_i)]^4}{v_i}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (6.2)$$

$$v_{eff} \leq \sum_{i=1}^N v_i \quad (6.3)$$

여기서 v_i 는 $u(x_i)$ 의 자유도로서 'A형 평가' 또는 'B형 평가'에 따라 다음과 같이 구해진다.

(1) $u(x_i)$ 가 식 (4.6)과 같이 n 번의 시험을 통하여

'A형 평가'로 구하여 질 때 자유도는 $(n-1)$ 이 된다. 만약 최소제공방법에 의하여 직선의 절편과 기울기를 결정하기 위하여 n 개의 독립적인

관측값이 사용되었다면, 절편 또는 기울기에 대

한 표준불확도의 자유도는 $v=n-2$ 이다. 또 n 개의 관측값에 대한 m 개의 파라미터의 최소제공적합선에 대해서는, 각각의 파라미터에 대한 표준불확도의 자유도는 $v=n-m$ 이 된다.

(2) 입력량 X_i 의 범위가 (a_-, a_+) 이면서 'B형 평

가'로 $u(x_i)$ 를 추정하였다면 자유도 v_i 는 아래 식에 의해서 구해진다.

$$v_i \approx \frac{1}{2} \frac{u(x_i)^2}{\sigma(u(x_i))^2} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right]^{-2} \quad (6.4)$$

여기서 큰 괄호내의 $\Delta u(x_i)/u(x_i)$ 를 ' $u(x_i)$ 의 상대불확도'라고 한다. 이 상대불확도는 얻을 수 있는 정보를 근거로 한 과학적 판단에 의해 주관적으로 구할 수 있는 값이다.

위의 식 (6.4)를 좀 더 간편하게 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$v_i \approx \frac{1}{2} \left(\frac{100}{R} \right)^2 \quad (6.5)$$

여기서 $R = \Delta u(x_i)/u(x_i) \times 100$ (%)는 상대불확도

를 백분율로 나타낸 값이다. R 값이 작다는 것은 표준불확도에 대한 신뢰성이 크다는 것을 의미한다. 여기의 R %는 표준불확도 또는 추정범위의 한계값이 그 값으로부터 $\pm R$ %까지 벗어날 수 있음을 의미하며, 이를 " $\pm R$ %까지 신뢰할 수 있다"라고 말한다. 예를 들어, 표준불확도 또는 추정범위의 한계값이 "약 25 %까지 신뢰할 수 있다"고 하면 상대불확도는

$\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0.25$ 가 되며, 식 (6.4)에 의하여 $v_i \approx (0.25)^{-2}/2 = 8$ 이 된다.

또한 약 50 %까지 신뢰 할수 있다면 $v_i = 2$ 가 된다. 따라서 추정범위의 한계

값에 대하여 100 %의 확신, 또는 확률 1, 또는 “0 %까지 신뢰할 수 있음”이라고 추정될 때, $R=0\%$ 가 되며, 이때의 자유도는 식 (6.5)에 의해 무한대 (∞)가 된다.

6.2.4 확장불확도를 구하는 절차

확장불확도를 구하는 절차를 단계별로 요약하면 다음과 같다. 여기서 제시하는 방법은 중심극한정리의 조건을 만족할 때 적용될 수 있다.

단계 1 y 와 $u_c(y)$ 를 구한다.

단계 2 식 (6.2)로부터 유효자유도 v_{eff} 를 계산한다.

단계 3 요구되는 신뢰수준 p 를 결정하고, t-분포표(표 6.1)에서 유효자유도가 v_{eff} 일 때 다음을 만족하는 $t_p(v_{eff})$ 를 구한다.

$$\Pr(-t_p(v_{eff}) \leq t \leq t_p(v_{eff})) = p, \quad (6.6)$$

여기서 t 는 자유도가 v_{eff} 인 t-분포를 따른다. 만약 자유도 v_{eff} 가 정수가 아니라면 내삽법으로 계산하던지 또는 소수점 아래를 버린 정수 값을 채택한다.

단계 4 포함인자를 $k=t_p(v_{eff})$ 로부터 구하고 $U=ku_c(y)$ 하여 U 를 구한다.

[주]

유효자유도 v_{eff} 가 10보다 상당히 클 때는 정규분포

이론에 의해 포함인자 k 를 쉽게 구할 수도 있다. 이때에는 95 % 또는 99 % 신뢰수준을 갖는 구간을 추정하기 위하여 $k=2$ 또는 $k=3$ 이 각각 사용될 수도 있다.

[예]

1. 5.1.3의 예를 이용하여 유효자유도와 확장불확도를 구하여 보자. 단계 2의 식 (6.2)를 이용하면 유효자유도는

$$v_{eff} = \frac{3967^4}{(679 \times 5.8)^4 / \infty + (435 \times 1.1)^4 / 4} \approx 18,896$$

이다. 위 식에서 높이에 대한 표준불확도의 자유도는, 벽면의 높이가 435 ± 10 cm를 벗어날 가능성이 전혀 없다고 하였기 때문에 상대불확도는 $R=0\%$ 가 되며, 식 (6.4)에 의해 무한대(∞)의 자유도를 갖게 된다. t -분포표를 이용하여 단계 3과 같이 k 값을 구하면 신뢰수준 95 %일 때 $k=1.96$ 이 된다. 따라서 확장불확도는

$$U = k u_c(R) = 1.96 \times 3967 \text{ cm}^2 = 7,775 \text{ cm}^2$$

가 된다. 또는 v_{eff} 가 상당히 큰 것으로 간주하여

표 6.1 - t -분포표 : 자유도 v 에 대하여 분포의 일부분 p 를 포함하는 $-t_p(v)$ 에서 $t_p(v)$ 까지의 구간을 정의하는 $t_p(v)$ 의 값.

자유도 v	신뢰수준 p (%)					
	68.27 ^(a)	90	95	95.45 ^(a)	99	99.73 ^(a)
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.80
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.70	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

^(a) 기대값 μ_z , 표준편차 σ 인 정규분포에 의해 기술되는 어떤 양 z 에 대하여, 구간 $\mu_z \pm k\sigma$ 는 $k=1, 2, 3$ 일 때 각각 분포의 일부분 $p=68.27, 95.45, 99.73\%$ 를 포함한다.

[주]에서와 같이 $k=2.0$ 을 사용할 수 있다.

2. 5.2.2의 예를 이용하여 유효자유도와 확장불확도를 구하여 보자. 유효자유도는

$$\begin{aligned}
 v_{eff} &= \frac{u_c^4(R)}{\frac{[u(R_a)]^4}{v(R_a)} + \frac{[u(R_b)]^4}{v(R_b)} + \frac{[c(R_c)u(R_c)]^4}{v(R_c)}} \\
 &= \frac{(5.0006 \times 10^{11})^4}{\frac{2 \times (1.001 \times 10^4 \times 2.5 \times 10^7)^4}{30} + \frac{(-1 \times 10^8 \times 25)^4}{30}} \\
 &\approx 289
 \end{aligned}$$

이며, t -분포표를 이용하여 단계 3과 같이 k 값을 구하면 신뢰수준 95 %일 때 $k=1.96$ 이 된다. 따라서 확장불확도는

$U = ku_c(R) = 1.96 \times 5.0006 \times 10^{11} = 9.8012 \times 10^{11}$ Ω 가 된다. 측정결과의 표시로서

“ $R = (100.02 \pm 0.9801) \times 10^{12}$ Ω , $k=1.96$ (신뢰수준 = 95 %)” 로 보고(제 7장 참조)할 수 있다. 또는 v_{eff} 가 상당히 큰 것으로 간주하여 [주]에서와 같이 $k=2.0$ 을 사용할 수 있다.

6.2.5 확장불확도에 대한 한국인정기구의 방침

내부적으로 한국인정기구(KOLAS)에서 확장불확도를 계산하는 경우, 다른 나라의 국가표준연구소와 관련 국제기구에서 채택하고 있는 실무적 방침에 보조를 맞추어, 측정의 유효자유도가 충분히 크도록(10 이상) 측정 계획을 수립하며, 다음의 표현 방법을 사용하기를 권장하고 있다.

“측정결과를 나타낼 때 전통적으로 합성표준불확도 $u_c(y)$ 를 사용하여 왔던 분야를 제외하고는 확장불확도 U 를 사용한다. 현재 국제적 실무관행에 맞추어 연구원에서도 U 를 계산할 때 포함인자 k 의 값으로 2를 채택한다. 그 값이 아닌 다른 k 값은 요구조건이 이미 설정되어 있거나 문서화되어 있는 경우에 한정하여 사용한다.”

7. 불확도 보고

7.1 일반적 지침

7.1.1 일반적으로 측정체계에서 그 등급이 높아짐에 따라, 측정결과와 그 불확도가 산출된 방법에 대하여 보다 상세한 내용이 요구된다. 그렇지만 이 측정체계의 어느 등급에서나 (시장에서의 상업 및 규제 활동, 산업에서의 공학기술 작업, 낮은 등급의 교정설비, 산업 연구 및 개발, 학술연구, 산업 일차표준 및 교정기관, 국가표준기관, BIPM 등) 측정의 재평가에 필요한 모든 정보가 제공되어 이를 필요로 하는 다른 사람들이 이용할 수 있어야 한다.

여기에서 등급별 차이는 측정체계의 더 낮은 등급에서는 교정 및 시험 체계에 대한 보고서, 시험 명세서, 교정 및 시험 성적서, 기기 사용설명서, 국제 및 국가 표준, 지역 규정 등의 형태로 더 많은 필요한 정보가 생산되어 이용될 수도 있다는 것이다.

7.1.2 측정결과 및 불확도 산출방법에 대한 상세한 내용을 성적서 또는 해당문서에 명시할 때, 실제 사용되고 있는 측정절차와 일치되도록 하기 위해서 그 내용은 반드시 최신의 것으로 유지되어야 한다.

7.1.3 산업 및 경제현장에서 매일같이 수행되는 수많은 측정이 불확도에 대한 분명한 보고 없이 이루어지고 있다. 그러나 많은 경우에 주기적으로 교정 받거나 법적으로 검사받아야 하는 측정기가 사용되고 있다. 따라서 이러한 측정기들이 자체의 규격이나 적용되고 있는 현행의 규정문서와 일치하고 있다면, 그 측정기의 지시값의 불확도는 이러한 규격명세서나 규정문서로부터 추정될 수 있을 것이다.

7.1.4 실제로 측정결과를 문서화할 때 필요한 정보의 양은 사용목적에 따라

달라지지만, 무엇이 요구되는가에 대한 기본원칙은 달라지지 않는다. 즉, 측정결과와 그 불확도를 보고할 때, 정보의 양이 너무 적은 것보다는 정보의 양이 지나치게 많다고 할지라도 그래도 많은 편이 바람직하다. 예를 들면, 다음과 같은 정보는 꼭 포함되어야 한다.

- 1) 시험 관측과 입력 데이터로부터 얻어진 측정결과와 그 불확도를 계산하기 위해 사용된 방법을 명확하게 기술한다.
- 2) 모든 불확도 성분들을 열거하고 이들의 평가 방법을 철저히 기술한다.
- 3) 필요한 경우 각각의 중요한 단계를 쉽게 따라 할 수 있고, 보고된 결과를 독립적으로 반복하여 계산할 수 있도록 데이터 분석방법을 제시한다.
- 4) 분석에 사용된 모든 보정값 및 상수들과 그들의 출처를 명시한다.

7.2 특별한 지침

7.2.1 합성표준불확도의 보고

측정결과 및 합성표준불확도 $u_c(y)$ 를 보고할 때, 다음 사항을 포함시켜야 한다.

- 1) 측정량 Y 가 어떻게 정의되었는가에 대한 완전한 내용
- 2) 측정량 Y 의 추정값 y 와 그 합성표준불확도 $u_c(y)$. 이때 y 및 $u_c(y)$ 의 단위는 항상 반드시 주어져야 한다.
- 3) 필요한 경우 상대합성표준불확도 $u_c(y)/|y|$, ($|y| \neq 0$ 일 때) 만일 측정결과를 이용하는 사람들에게 유용하다고 생각되면, 예를 들어 포함인자를 계산하는데 도움이 되거나 측정을 이해하는데 도움이 되는 경우에는 다음 사항을 표시할 수도 있다.
 - 추정유효자유도 ν_{eff}
 - A형 및 B형의 합성표준불확도 $u_{cA}(y)$, $u_{cB}(y)$

와 각각의 추정유효자유도 ν_{effA} , ν_{effB} 이며, 불확도의 척도가 $u_c(y)$ 일 때, 오해의 소지를 없애기 위하여 측정결과의 수치를 다음 4가지중 한가지로 표

시하는 것이 좋다. 예를 들어 명목값이 100 g인 질량표준 m_s 에 대해 보고한다고 가정하자. 결과를 보고하는 문서 중에 u_c 가 정의되어 있는 경우에는 괄호 안의 용어는 생략할 수 있다.

- 1) “ $m_s = 100.021\ 47\ \text{g}$, $u_c = 0.35\ \text{mg}$ ” (합성표준불확도)
- 2) “ $m_s = 100.021\ 47(35)\ \text{g}$, 여기서 괄호 안의 숫자는 인용된 결과의 마지막 두 자릿수에 해당되는 (합성표준불확도) u_c 의 수치이다.”
- 3) “ $m_s = 100.021\ 47(0.000\ 35)\ \text{g}$, 여기서 괄호 안의 숫자는 (합성표준불확도) u_c 를 인용된 결과의 단위로 표시한 수치이다.”
- 4) “ $m_s = (100.021\ 47 \pm 0.000\ 35)\ \text{g}$, 다만 여기서 기호 \pm 다음의 숫자는 (합성표준불확도) u_c 의 수치이며 신뢰구간이 아니다.”

[주]

여기서 \pm 형식은 가능한 피하는 것이 좋다. 왜냐하면 이것은 높은 신뢰수준에 해당되는 구간을 나타내기 위해 전통적으로 사용되어 왔으므로 확장불확도와 혼동할 수 있기 때문이다. 상기 4)의 단서는 이러한 혼동을 막기 위한 것이지만 $Y = y \pm u_c(y)$ 라는 표시는 여전히 오해될 수 있다. 특히 위의 단서가 누락되었을 경우 $k=1$ 인 확장불확도로 여길수도 있고, 구간 $y - u_c(y) \leq Y \leq y + u_c(y)$ 이 정규분포에 관련하여 특정한 신뢰 수준 p 를 갖고 있다고 오해될 수도 있다.

7.2.2 확장불확도의 보고

측정결과를 보고할 때 불확도의 척도가 확장불확도 $U = k u_c(y)$ 인 경우에는 다음 내용을 포함하여야 한다.

- 1) 측정량 Y 가 어떻게 정의되었는가를 완전하게 기술한다.
- 2) 측정결과를 $Y = y \pm U$ 로 나타내고 y 및 U 의 단위를 표시한다.
- 3) 필요하다면, 상대확장불확도 $U/|y|$ ($|y| \neq 0$)를 포함시킨다.
- 4) U 를 얻기 위해 사용한 포함인자 k 의 값을 제시한다.(또는 사용자의 편의를 위해 k 및 $u_c(y)$ 둘 다 표시한다.)

- 5) 구간 $y \pm U$ 관련된 적합한 신뢰구간과 그 값의 결정방법을 제공한다.
- 6) 7.2.3의 3항에서 요약한 정보를 제공하거나 이를 포함하고 있는 발간문서를 참고한다.

불확도의 척도가 U 일 때는, 보다 명확히 하기 위하여 다음의 예시처럼 측정의 수치 결과를 명시하는 것이 좋다. 결과를 보고하는 문서 중에 U , u_c , k 가 정의되어 있는 경우에는 괄호 안의 용어는 생략할 수 있다.

“ $m_s = (100.021\ 47 \pm 0.000\ 79)$ g, 여기서 \pm 기호 다음의 숫자는 (확장불확도) $U = k u_c$ 의 값이며, 이 값은 (합성표준불확도) $u_c = 0.35$ mg과 자유도 $\nu = 9$ 에 대한 t 분포에 근거한 (포함인자) $k = 2.26$ 으로부터 결정되었고, 이는 95 %의 신뢰수준을 갖는 것으로 추정되는 구간을 나타낸다.”

7.2.3 공통 사항

- 1) 만약 어떤 측정에서 복수의 측정량을 동시에 결정하는 경우, 즉 두 개 또는 그 이상의 출력 추정값 y_i 를 제시하는 경우에는 (H.2, H.3, H.4 참조), y_i 및 $u_c(y_i)$ 를 제시하는 것 이외에도 공분산 행렬 요소 $u(y_i, y_j)$ 또는 상관계수행렬(C.3.6, note 2 참조)의 요소 $r(y_i, y_j)$ 를 제시해야 한다.

- 2) 추정값 y 와 그 합성표준불확도 $u_c(y)$ 또는 확장불확도 U 의 수치 값은 필요이상의 과도한 자릿수로 표시하지 않아야 한다. 후속 계산에서 반올림에 의한 오차를 피하기 위하여 추가 자릿수를 남겨 놓을 필요가 있는 경우가 있지만,

$u_c(y)$ 및 U 는 (입력 추정값 x_i 의 표준불확도 $u(x_i)$ 도 마찬가지로) 일반적으로 많아야 유효숫자 두 자리면 충분하다.

최종결과를 보고할 때 불확도는 반올림한 값을 사용하는 것보다 그냥 올림하는 것이 적합할 경우가 종종 있다. 예를들어, $u_c(y) = 10.47$ mΩ은 11 mΩ로 올림하는 것이 좋다. 그러나

$u(x_i) = 28.05$ kHz 인 경우는 일반 상식 선에서 판단하여 29 kHz로 하지 않고 아래 자리를 잘라 내어 28 kHz로 하는 것이 적절하다. 또한 출력 및 입력 추정값은 그 불확도와 양립하도록 근사값을 결정해야 한다.

예를들어, $y = 10.05762 \Omega$, $u_c(y) = 27 \text{ m}\Omega$ 인 경우에는 $y = 10.058 \Omega$ 이 되도록 반올림해야 한다. 상관계수는 그 절대값이 1에 가까울 때 세 자릿수의 정확도로 나타내야 한다.

3) 측정결과와 그 불확도가 어떻게 얻어졌나 기술하는 상세 보고서는 7.1의 4항에서 추천된 사항에 따라야 한다. 즉,

- ① 각 입력량 추정치 x_i 의 값과 표준불확도 $u(x_i)$ 를 그것을 구한 방법과 함께 기록한다.
- ② 상관관계가 있는 모든 입력량의 추정공분산 또는 추정상관계수(가급적 두 가지 모두)와 이들을 구하기 위하여 사용된 방법을 기록한다.
- ③ 각 입력량 추정값의 표준불확도에 대한 자유도와 산출방법을 기록한다.
- ④ 수학적 관계식 $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ 와, 필요하다고 생각되면 편도함수 또는 감도계수 $\partial f / \partial x_i$ 를 기록한다. 시험적으로 계수들이 결정된 경우 반드시 이를 기록해야 한다.

[주]

이러한 함수관계 f 는 극히 복잡하거나 또는 명확하게 나타내지 못하고 컴퓨터 프로그램으로만 존재할 수도 있다. 따라서 f 와 그들의 도함수를 항상 표시할 수 있는 것은 아니다. 함수 f 를 일반적인 용어로 기술하거나 또는 사용된 프로그램을 참고문헌과 함께 인용할 수도 있다. 이러한 경우 측정량 Y 의 추정값 y 와 합성표준불확도 $u_c(y)$ 가 어떻게 산출되었는지를 분명하게 하는 것이 중요하다.

8. 재검토 기한

「훈령·예규 등의 발령 및 관리에 관한 규정」(대통령훈령 제248호)에 따라 이 고시 발령한 후의 법령이나 현실 여건의 변화 등을 검토하여 이 고시의 폐지, 개정 등의 조치를 하여야 하는 기한은 2019년 02월 14일까지로 한다.

부 칙

제1조(시행일) 이 고시는 고시한 날로부터 시행한다.

제2조(폐지고시) 이 기준의 시행과 동시에 종전의 측정결과의 불확도 추정 및 표현을 위한 지침(기술표준원 고시 제2012-0074호 : 2012. 2. 17)은 폐지하며, 종전의 지침에 따른 기타 행위는 이 기준에 의하여 행한 것으로 본다.

부록 I. ISO 지침서의 예제

이 부록에는 ISO 지침서의 부록 H를 번역하여 실었다. 각 절의 번호는 원문을 그대로 따라 원문 참조시 편리하도록 하였다. 여기에는 H.1에서 H.6까지 여섯 개의 예가 수록되어 있는데, 이 예들은 측정의 불확도를 평가하고 표현하는데 관하여 이 지침서에 제시된 기본원리들을 예시하기 위하여 상당히 상세하게 작성되었다. 본문 중에 주어진 예와 이 부록의 예를 잘 활용한다면 독자들은 이 지침서의 기본원리들을 각자의 실제 상황에 적용할 수 있을 것이다.

실례를 들어 설명하여 이해를 돕고자 하는 것이 목적이기 때문에, 이 예들은 부득이 단순화된 것들이다. 더욱이 각 예에 사용된 수치들은 단지 설명을 위한 것일 뿐, 반드시 실제의 측정을 나타내는 것은 아니다. 데이터는 주어진 대로 사용되지만, 반올림 오차를 막기 위하여 중간 계산과정에서는 더 많은 자릿수를 유지하였다. 몇 개의 양들을 포함하는 계산으로 얻어져 명시된 결과는 이 양들에 대하여 주어진 수치들에 의해 함축되는 결과와 약간 다를 수도 있다.

이 지침서의 앞 부분에서 지적한 것 처럼, 불확도 성분을 평가하는데 사용된 방법을 A형 또는 B형으로 구분하는 것은 단지 편의상 그럴 뿐이다; 이러한 구분은 합성표준불확도나 확장불확도를 결정하는데 필요하지 않다. 왜냐하면, 모든 불확도 성분은 어떻게 평가되었는가에 상관없이 똑같이 취급되기 때문이다[3.3.3, 5.1.1 참조: 본문을 가리킬 때 절의 번호는 KOLAS 지침서의 절 번호를 말함].

그러므로, 아래의 예에서는 특정한 불확도 성분을 평가하는데 사용된 방법을 A형 또는 B형으로 명시하지 않았다. 그러나, 설명을 보면 어느 한 성분이 A형 평가로 얻어졌는가 또는 B형 평가로 얻어졌는가는 분명할 것이다.

예제 목록:

- H.1 게이지블록 교정
- H.2 전기저항과 리액턴스의 동시측정
- H.3 온도계 교정
- H.4 방사능 측정
- H.5 분산분석(ANOVA : Analysis of Variance)

H.6 기준 스케일에 의한 측정 : 정도

H.1 게이지블록 교정

이 예는 간단해 보이는 측정조차도 불확도 평가에서 미묘한 면을 가질 수 있다는 사실을 보여준다.

H.1.1 측정의 문제

명목값 50 mm인 게이지블록의 길이를 이미 값을 알고 있는 같은 명목길이의 표준기와 비교하여 결정한다. 두 개의 게이지블록을 비교하여 얻을 수 있는 결과는 그 길이의 차 d 이다.

$$d = l(1 + \alpha\theta) - l_s(1 + \alpha_s\theta_s) \quad (\text{H.1})$$

여기서

l : 측정량, 즉, 피교정 게이지블록의 20 °C에서의 길이

l_s : 교정성적서에 기재된 20 °C에서의 표준 게이지블록의 길이

α 및 α_s : 피교정 게이지블록과 표준 게이지블록의 열팽창 계수

θ 및 θ_s : 피교정 게이지블록과 표준 게이지블록이 기준온도인 20 °C로부터 벗어난 온도 편차

H.1.2 수학적 모델

식 (H.1)으로부터 측정량 l 은 아래와 같이 주어진다.

$$l = \frac{l_s(1 + \alpha_s\theta_s) + d}{(1 + \alpha\theta)} = l_s + d + l_s(\alpha_s\theta_s - \alpha\theta) + \dots \quad (\text{H.2})$$

만약, 피교정 게이지블록과 표준 게이지블록의 온도차이를 $\delta\theta = \theta - \theta_s$ 그리고, 열팽창계수의 차이를 $\delta\alpha = \alpha - \alpha_s$ 로 표시하면, 식 (H.2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 l &= f(l_s, d, a_s, \theta, \delta a, \delta \theta) \\
 &= l_s + d - l_s(\delta a \cdot \theta + a_s \cdot \delta \theta)
 \end{aligned}
 \tag{H.3}$$

온도와 열팽창계수의 차이 $\delta\theta$ 와 δa 는 각각 0으로 추정되며(단, 그들의 불확도가 0이라는 것은 아님), δa , a_s , $\delta\theta$ 및 θ 는 서로 상관관계가 없다고 가정한다(만약 측정량이 변수 θ, θ_s, a 및 a_s 로 나타내어지는 경우라면, θ 와 θ_s , a 와 a_s 사이의 상관 관계가 포함되어야 할 것이다).

따라서 식 (H.3)으로부터 측정량 l 의 추정값은 $l_s + \bar{d}$ 라는 간단한 관계에서 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. 여기서 l_s 는 교정성적서에 주어진 20°C에서의 표준 게이지블록의 길이이고, d 는 \bar{d} 에 의해 추정되는데, \bar{d} 는 서로 독립된 5번의($n=5$) 반복 측정값의 산술평균이다. 측정량 l 의 합성표준 불확도 $u_c(l)$ 은 5.1.1의 식 (5.1)을 위의 식 (H.3)에 적용하여 얻을 수 있다.

H.1.3 표준불확도 성분의 평가(Contributory variances)

이 예에 관련되어 아래에서 논의되는 세부사항들이 표 H.1에 정리되어 있다.

δa 와 $\delta\theta$ 를 0으로 가정하였으므로 식 (5.1)을 식 (H.3)에

$$\begin{aligned}
 u_c^2(l) &= c_{l_s}^2 u^2(l_s) + c_d^2 u^2(d) + c_{a_s}^2 u^2(a_s) \\
 &\quad + c_{\theta}^2 u^2(\theta) + c_{\delta a}^2 u^2(\delta a) + c_{\delta \theta}^2 u^2(\delta \theta)
 \end{aligned}
 \tag{H.4}$$

가 되고, 여기서

$$c_{l_s} = \partial f / \partial l_s = 1 - (\delta a \cdot \theta + a_s \cdot \delta \theta) = 1$$

$$c_d = \partial f / \partial d = 1$$

$$c_{a_s} = \partial f / \partial a_s = -l_s \delta \theta = 0$$

$$c_{\theta} = \partial f / \partial \theta = -l_s \delta a = 0$$

$$c_{\delta a} = \partial f / \partial \delta a = -l_s \theta$$

$$c_{\delta \theta} = \partial f / \partial \delta \theta = -l_s a_s$$

이다. 따라서 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$u_c^2(l) = u^2(l_s) + u^2(d) + l_s^2 \theta^2 u^2(\delta a) + l_s^2 a_s^2 u^2(\delta \theta) \tag{H.5}$$

표 H.1 - 표준불확도 성분의 요약

표준불확도 성분 $u(x_i)$	불확도의 원인	표준불확도 값 $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) \equiv c_i u(x_i)$ (nm)	자유도
$u(l_s)$	표준 게이지블록의 교정	25 nm	1	25	18
$u(d)$	두 게이지블록 길이차이의 측정값	9.7 nm	1	9.7	25.6
$u(\bar{d})$	반복측정 결과	5.8 nm			24
$u(d_1)$	비교측정기의 우연효과	3.9 nm			5
$u(d_2)$	비교측정기의 계통효과	6.7 nm			8
$u(a_s)$	표준게이지블록의 열팽창계수	$1.2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	
$u(\theta)$	측정대의 온도	0.41 $^\circ\text{C}$	0	0	
$u(\bar{\theta})$	측정대의 평균온도	0.2 $^\circ\text{C}$			
$u(\Delta)$	실내온도의 주기적변동	0.35 $^\circ\text{C}$			
$u(\delta a)$	게이지블록 열팽창계수의 차이	$0.58 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$-l_s \theta$	2.9	50
$u(\delta \theta)$	게이지블록 온도의 차이	0.029 $^\circ\text{C}$	$-l_s a_s$	16.6	2
			$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1002 \text{ nm}^2$ $u_c(l) = 32 \text{ nm}$ $v_{\text{eff}}(l) = 16$		

H.1.3.1 표준기의 교정불확도, $u(l_s)$

표준 게이지블록의 교정성적서에 확장불확도 $U = 0.075 \mu\text{m}$ 로 주어졌으며, 포함인자 $k=3$ 을 사용하였다고 명시되어 있다. 이 때 표준불확도는 다음과 같이 구해진다.

$$u(l_s) = (0.075 \mu\text{m})/3 = 25 \text{ nm}$$

H.1.3.2 길이차이의 측정값의 불확도, $u(d)$

게이지블록의 비교측정을 특성짓는 합동시험표준편차는 2개의 게이지블록의 길이 차이를 25번 독립적으로 반복측정한 값들의 변동도로부터 구하여졌으며, 그 값은 13 nm로 나타났다. 이 예에서는 5번의 반복측정값을 취하여 평균을 구하였다. 이 때 산술평균과 관련된 표준불확도는

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = (13 \text{ nm})/\sqrt{5} = 5.8 \text{ nm}$$

가 된다(4.2.4 참조).

1과 1s 비교에 사용된 게이지블록 비교측정기의 교정성적서에 의하면, 6번의 반복측정 결과에 근거하여 “우연오차로 인한” 비교측정기의 불확도는 95% 신뢰수준에서 $\pm 0.01 \mu\text{m}$ 라고 되어 있다. 따라서 자유도 $\nu=6-1=5$ 에 대한 t 인자 $t_{95}(5)=2.57$ 을 사용하여 구한 표준불확도는 다음과 같다.

$$u(d_1) = (0.01 \mu\text{m})/2.57 = 3.9 \text{ nm}$$

“계통오차로 인한” 비교측정기의 불확도는 “3 σ 수준”에서 $0.02 \mu\text{m}$ 라고 성적서에 주어져 있다. 이 경우 표준불확도는

$$u(d_2) = (0.02 \mu\text{m})/3 = 6.7 \text{ nm}$$

가 된다.

길이차이의 측정값의 불확도 $u(d)$ 는 각 추정분산의 합으로부터 구하여진다.

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93 \text{ nm}^2$$

또는

$$u(d) = 9.7 \text{ nm}$$

H.1.3.3 열팽창계수의 불확도, $u(a_s)$

표준 게이지블록의 열팽창계수는 $a_s=11.5\times 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ 로 주어졌으며, 이에 대한 불확도는 $\pm 2\times 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ 의 범위를 가지는 직사각형 분포로 나타내진다. 이에 따른 표준불확도는

$$u(a_s)=(2\times 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1})/\sqrt{3}=1.2\times 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

이다. H.1.3에 보인 것처럼 $c_{a_s}=\partial f/\partial a_s=-I_s\delta\theta=0$ 이기 때문에, 이 불확도는 1차항에서는 1의 불확도에 아무런 영향을 주지 않는다. 그러나, H.1.7에서 보는 것처럼 2차항에서는 영향을 미친다.

H.1.3.4 게이지블록 온도의 편차에 대한 불확도, $u(\theta)$

측정대의 온도는 $(19.9\pm 0.5)\text{ }^\circ\text{C}$ 로 보고되어 있으나, 매번 측정시의 온도는 기록되어 있지 않다. 명기된 최대 오프셋(offset) $\Delta = 0.5\text{ }^\circ\text{C}$ 는 온도조절시스템으로 인한 온도의 주기적인 변동의 크기를 나타내는 것이며, 평균온도의 불확도를 나타내는 것은 아니라고 한다. 평균 온도편차의 값은

$$\bar{\theta} = 19.9\text{ }^\circ\text{C} - 20\text{ }^\circ\text{C} = -0.1\text{ }^\circ\text{C}$$

이며, 이 $\bar{\theta}$ 는 측정대의 평균온도의 불확도로 인하여 표준불확도

$$u(\bar{\theta}) = 0.2\text{ }^\circ\text{C}$$

를 갖고 있는 것으로 보고되어 있다.

시간에 따른 온도의 주기적 변동이 U자형 분포를 나타낸다면, 이 경우 표준불확도는

$$u(\Delta) = (0.5\text{ }^\circ\text{C})/\sqrt{2}=0.35\text{ }^\circ\text{C}$$

가 된다.

온도편차 θ 가 $\bar{\theta}$ 와 같다고 하면, θ 의 표준불확도는 다음과 같이 얻어진다.

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0.165\text{ }^\circ\text{C}^2$$

$$u(\theta) = 0.41\text{ }^\circ\text{C}$$

H.1.3에 보인 것처럼 $c_\theta=\partial f/\partial \theta=-I_s\delta a=0$ 이기 때문에, 이 불확도 역시 1차항에서는 1의 불확도에 아무런 영향을 주지 않는다. 그러나, H.1.7에서 보는 것처럼 2차항에서는 영향을 미친다.

H.1.3.5 열팽창계수의 차이에 대한 불확도, $u(\delta\alpha)$

두 열팽창계수의 차이 $\delta\alpha$ 의 추정 변동폭은 $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 이며, 이 변동폭 내에서는 $\delta\alpha$ 가 어떤 값을 가질 확률이 모두 같다고 한다. 이 때 표준불확도(직사각형 확률분포에 따른)는

$$u(\delta\alpha) = (1 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 0.58 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

이 된다.

H.1.3.6 게이지블록의 온도 차이에 대한 불확도, $u(\delta\theta)$

표준 게이지블록과 피교정 게이지블록은 같은 온도에 있다고, 즉 $\delta\theta=0$ 이라고 가정하였으나, 실제 온도차이는 $-0.05 \text{ } ^\circ\text{C}$ 에서 $+0.05 \text{ } ^\circ\text{C}$ 까지로 추정되는 구간 내에서 같은 확률로 어떤 값이든지 가질 수 있을 것으로 생각할 수 있다. 이 경우의 표준불확도는 다음과 같다.

$$u(\delta\theta) = (0.05 \text{ } ^\circ\text{C}) / \sqrt{3} = 0.029 \text{ } ^\circ\text{C}$$

H.1.4 합성표준불확도

합성표준불확도 $u_c(l)$ 은 식 (H.5)를 적용하여 계산한다.

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= (25 \text{ nm})^2 + (9.7 \text{ nm})^2 \\ &\quad + (0.05 \text{ m})^2 (-0.1 \text{ } ^\circ\text{C})^2 (0.58 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})^2 \\ &\quad + (0.05 \text{ m})^2 (11.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})^2 (0.029 \text{ } ^\circ\text{C})^2 \end{aligned} \tag{H.6a}$$

$$\begin{aligned} &= (25 \text{ nm})^2 + (9.7 \text{ nm})^2 + (2.9 \text{ nm})^2 + (16.6 \text{ nm})^2 \end{aligned} \tag{H.6b}$$

$$= 1002 \text{ nm}^2$$

또는

$$u_c(l) = 32 \text{ nm} \tag{H.6c}$$

가장 영향이 큰 불확도는 명백히 표준기에 의한 것으로서 $u(l_0) = 25 \text{ nm}$ 이다.

H.1.5 최종 결과

표준 게이지블록의 교정성적서는 20 °C에서 $l_s=50.000\ 623\ \text{mm}$ 라고 나타내고 있다. 피교정 게이지블록과 표준 게이지블록 사이의 길이차이를 5회 반복측정한 값의 산술평균 \bar{d} 는 215 nm이다. 따라서, $l=l_s+\bar{d}$ (H.1.2 참조)이므로, 20 °C에서 피교정 게이지블록의 길이 l 은 50.000 838 mm이다. 7.2.2에 따라 측정의 최종 결과는 다음과 같이 나타낼 수 있다. $l=50.000\ 838\ \text{mm}$ 이며, 합성표준 불확도 $u_c=32\ \text{nm}$ 이다. 이에 따른 상대합성표준불확도는 $u_c/l=6.4\times 10^{-7}$ 이다.

H.1.6 확장불확도

약 99%의 신뢰수준에 대응하는 $U_{99} = k_{99} u_c(l)$ 이 필요하다고 하자. 필요한 절차는 6장에서 이미 설명한 바와 같으며, 자유도는 표 H.1에 나타나있다. 각각의 표준불확도에 대응하는 자유도는 다음과 같이 구한다.

1) 표준기의 교정불확도, $u(l_s)$

인용된 확장불확도를 구하는데 사용된 합성표준 불확도의 유효자유도는 $v_{eff}(l_s) = 18$ 이라고 교정성적서에 명기되어 있다.

2) 길이차이의 측정값의 불확도, $u(d)$

5개의 반복측정값으로부터 \bar{d} 를 구하였지만, $u(\bar{d})$ 는 25번의 측정에 기초한 합동시험표준편차로부터 구해졌기 때문에, $u(\bar{d})$ 의 자유도는 $v(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$ 이다. 우연효과로 인한 비교측정기의 불확도 $u(d_1)$ 의 자유도는, d_1 을 6번의 반복측정으로부터 구하였기 때문에, $v(d_1) = 6 - 1 = 5$ 이다. 계통효과에 대한 불확도 $\pm 0.02\ \mu\text{m}$ 는 25%까지 신뢰할 수 있다고 가정하면, 식 (6.5)에 의해 자유도는 $v(d_2) = 8$ 이 된다. 식 (6.2)를 사용하여 $u(d)$ 의 유효자유도 $v_{eff}(d)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned}
 v_{eff}(d) &= \frac{[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2}{\frac{u^4(\bar{d})}{v(\bar{d})} + \frac{u^4(d_1)}{v(d_1)} + \frac{u^4(d_2)}{v(d_2)}} \\
 &= \frac{(9.7 \text{ nm})^4}{\frac{(5.8 \text{ nm})^4}{24} + \frac{(3.9 \text{ nm})^4}{5} + \frac{(6.7 \text{ nm})^4}{8}} \\
 &= 25.6
 \end{aligned}$$

3) 열팽창계수의 차이에 대한 불확도, $u(\delta\alpha)$

두 열팽창계수의 차이 $\delta\alpha$ 의 추정 변동폭 $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ 은 10%까지 신뢰할 수 있다고 간주한다. 역시 식 (6.5)에 의해 $v(\delta\alpha) = 50$ 이 구해진다.

4) 게이지블록의 온도 차이에 대한 불확도, $u(\delta\theta)$

온도차이 $\delta\theta$ 에 대한 $-0.05 \text{ }^\circ\text{C}$ 에서 $+0.05 \text{ }^\circ\text{C}$ 까지의 추정구간이 50%까지 신뢰할 수 있다고 판단될 경우, 자유도는 식 (6.5)에 의해 $v(\delta\theta) = 2$ 가 된다. 식 (H.6b)와 (H.6c), 그리고 위의 1)에서 4)까지의 과정에서 얻어진 v 값들을 사용하여 식 (6.2)에 의해 $v_{eff}(l)$ 을 계산하면,

$$\begin{aligned}
 v_{eff}(l) &= \\
 &= (32 \text{ nm})^4 / \left[\frac{(25 \text{ nm})^4}{18} + \frac{(9.7 \text{ nm})^4}{25.6} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(2.9 \text{ nm})^4}{50} + \frac{(16.6 \text{ nm})^4}{2} \right] = 16.7
 \end{aligned}$$

을 얻는다. 확장불확도를 구하기 위해 소숫점 이하를 버리면 $v_{eff}(l) = 16$ 을 얻는다. 이제 t 분포표로부터 신뢰수준 99%와 자유도 16에 대응하는 $t_{99}(16) = 2.92$ 를 찾으면, 다음과 같은 확장불확도를 얻게 된다.

$$U_{99} = t_{99}(16) u_c(l) = 2.92 \times (32 \text{ nm}) = 93 \text{ nm}$$

이에 따라 측정의 최종결과는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$l = (50.000\ 838 \pm 0.000\ 093) \text{ mm}$ 이며, \pm 기호 다음의 숫자는 확장불확도 $U = k u_c$ 의 값을 나타낸다. 여기서 U 는 합성표준불확도 $u_c = 32 \text{ nm}$ 와 자유도 16에 대한 t 분포에 근거한 포함인자 $k = 2.92$ 로부터 구해졌으며, 99%의 신뢰수준을 갖는 것으로 추정되는 구간을 나타내고 있다. 이에 대

응하는 상대확장불확도는 $U/1 = 1.9 \times 10^{-6}$ 이다.

H.1.7 2차항

함수 $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ 의 비선형성이 상당히 커서 Taylor 급수 전개에서의 고차항들이 무시될 수 없을 때에는, 이 예에서 합성표준불확도 $u_c(l)$ 을 얻기 위해 사용한, 식 (5.1)은 보완되어야 한다는 것을 5.1.1의 [주] 4에서 지적한 바 있다. 이 예에서도 그러한 경우인데, 이 시점까지 제시된 $u_c(l)$ 의 평가는 아직 완전하지 않다. 5.1.1의 [주] 4에 주어진 표현을 식 (H.3)에 적용하면, 식 (H.5)에 더해져야 하는 두 개의 서로 다른 무시할 수 없는 2차항이 생기게 된다. 이 항들은 [주] 4에 주어진 표현 속에 있는 2차항 때문에 생기는데, 다음과 같다.

$$I_a^2 u^2(\delta a) u^2(\theta) + I_s^2 u^2(a_s) u^2(\delta \theta)$$

그러나, 이 중 첫번째 항만이 $u_c(l)$ 에 상당한 기여를 한다.

$$\begin{aligned} I_a u(\delta a) u(\theta) &= (0.05 \text{ m})(0.58 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(0.41 \text{ }^\circ\text{C}) \\ &= 11.7 \text{ nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_s u(a_s) u(\delta \theta) &= (0.05 \text{ m})(1.2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(0.029 \text{ }^\circ\text{C}) \\ &= 1.7 \text{ nm} \end{aligned}$$

이 2차항들로 인하여 $u_c(l)$ 은 32 nm에서 34 nm로 증가하였다.

H.2 전기저항과 리액턴스의 동시측정

이 예제는 동일한 측정에서 동시에 결정되는 복수의 측정량 또는 출력량을 취급하고 그들의 추정량의 상관관계를 다루는 방법을 설명한다. 여기서는 관측의 우연변동만을 고려한다. 실제로는 계통효과에 대한 보정의 불확도도 측정결과의 불확도에 기여하게 될 것이다. 이 예제의 데이터들은 두가지 방법을 사용하여 해석되지만 본질적으로 각각 동일한 값이 얻어진다.

H.2.1 측정의 문제

한 회로소자의 저항 R 과 리액턴스 X 를 결정하기 위하여 그 양단 사이의 정현파 교류전위차의 진폭 V , 그것을 통과하는 교류전류의 진폭 I , 교류전류에 대한 교류전위차의 위상각 ϕ 을 측정한다. 이 경우 3개의 입력량은 V , I , ϕ 이고, 3개의 출력량(측정량)은 임피던스 성분인 R , X , Z 이다. $Z^2 = R^2 + X^2$ 이므로 독립된 출력량은 2개 뿐이다.

H.2.2 수학적 모델 및 데이터

측정량은 Ohm의 법칙에 의해 입력량과 다음과 같은 관계가 있다.

$$R = \frac{V}{I} \cos \phi; X = \frac{V}{I} \sin \phi; Z = \frac{V}{I} \quad (\text{H.7})$$

세 개의 입력량 V , I , ϕ 의 독립된 5개 조의 동시 관측값이 비슷한 조건하에서 얻어졌고 그 결과는 표 H.2와 같다. 관측값의 산술평균과 식 (4.3)과 (4.5)로부터 계산된 시험표준편차도 표에 나타내었다. 평균값은 입력량의 기대치의 최적추정량으로서 얻어진 것이고, 시험표준편차는 그 평균의 표준불확도가 된다.

평균값 \bar{V} , \bar{I} , $\bar{\phi}$ 는 동시 관측값으로부터 얻어지기 때문에 서로 상관관계가 있으며 이들의 상관관계는 측정량 R , X , Z 의 표준불확도의 평가에서 고려되어야 한다. 필요한 상관계수는 식 (5.14)로부터 계산된 $\rho(\bar{V}, \bar{I})$, $\rho(\bar{V}, \bar{\phi})$, $\rho(\bar{I}, \bar{\phi})$ 값을 이용하여 식 (5.9)로부터 쉽게 구해진다. 그 결과는 표 H.2에 포함되어 있고 여기서 $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ 및 $r(x_i, x_i) = 1$ 임을 상기해야 한다.

표 H.2 - 5개조의 동시측정으로 부터 구해진 입력량 V , I , ϕ 의 값

군 번호 k	입 력 량		
	V(V)	I(mA)	φ(rad)
1	5.007	19.663	1.0456
2	4.994	19.639	1.0438
3	5.005	19.640	1.0468
4	4.990	19.685	1.0428
5	4.999	19.678	1.0433
산술평균	$\bar{V}=4.9990$	$\bar{I}=19.6610$	$\bar{\phi} = 1.044\ 46$
평균의 시험 표준편차	$s(\bar{V}) = 0.0032$	$s(\bar{I}) = 0.0095$	$s(\bar{\phi}) = 0.000\ 75$
상 관 계 수			
$r(\bar{V}, \bar{I}) = -0.36, \quad r(\bar{V}, \bar{\phi}) = 0.86$ $s(\bar{I}, \bar{\phi}) = -0.65$			

H.2.3 결과 : 방법 1

방법 1은 표 H.3에 요약되었다.

세 개의 측정량 R, X, Z의 값은 V, I, φ에 대한 표 H.2에서의 평균 값 $\bar{V}, \bar{I}, \bar{\phi}$ 을 이용하여 식 (H.7)의 관계식으로부터 구해진다.

표 H.3 - 출력량 R, X, Z의 계산값 (방법 1)

조 번 호	측정량의 추정값 y_l 과 입력추정값 x_i 의 관계	측정결과인 추정값 y_l	측정결과의 합성 표준불확도 $u_c(y_l)$
1	$y_1 = R = (\bar{V}/\bar{I}) \cos \bar{\phi}$	$y_1 = R = 127.732 \Omega$	$u_c(R) = 0.071 \Omega$ $u_c(R)/R = 0.06 \times 10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\bar{V}/\bar{I}) \sin \bar{\phi}$	$y_2 = X = 219.847 \Omega$	$u_c(X) = 0.295 \Omega$ $u_c(X)/X = 0.13 \times 10^{-2}$
3	$y_3 = Z = \bar{V}/\bar{I}$	$y_3 = Z = 254.260 \Omega$	$u_c(Z) = 0.236 \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0.09 \times 10^{-2}$
상 관 계 수 $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = -0.588 \quad r(y_1, y_3) = r(R, Z) = -0.485 \quad r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0.933$			

R, X, Z 의 표준불확도는 앞에서 설명한 바와 같이 입력량 $\bar{V}, \bar{I}, \bar{\phi}$ 가 상관관계가 있기 때문에 식 (5.10)으로부터 구해진다. 한 예로서, $Z=\bar{V}/\bar{I}$ 를 생각하자. \bar{V} 를 x_1 , \bar{I} 를 x_2 , f 를 $Z=\bar{V}/\bar{I}$ 라고 하면 식 (5.10)에 의해 Z 의 합성표준불확도는 다음과 같이 주어진다.

$$u_c^2(Z) = \left[\frac{1}{\bar{I}}\right]^2 u^2(\bar{V}) + \left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right]^2 u^2(\bar{I}) + 2\left[\frac{1}{\bar{I}}\right] \left[-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right] u(\bar{V})u(\bar{I})r(\bar{V}, \bar{I}) \quad (\text{H.8a})$$

$$= Z^2 \left[\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right]^2 + Z^2 \left[\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right]^2 - 2Z^2 \left[\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right] \left[\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right] r(\bar{V}, \bar{I}) \quad (\text{H.8b})$$

또는

$$u_{c,r}^2(\bar{Z}) = u_r^2(\bar{V}) + u_r^2(\bar{I}) - 2u_r(\bar{V})u_r(\bar{I})r(\bar{V}, \bar{I}) \quad (\text{H.8c})$$

여기서 $u(\bar{V})=s(\bar{V})$, $u(\bar{I})=s(\bar{I})$ 이고, 마지막 수식에서의 첨자 “r”은 u 가 상대불확도임을 표시한 것이다. 표 H.2에서의 적당한 값을 식 (H.8a)에 대입하면 $u_c(Z)=0.236$ Ω이 주어진다.

세 개의 측정량 또는 출력량들이 동일한 입력량에 의존되기 때문에 그들도 역시 서로 상관관계가 있다. 이러한 상관관계를 기술하는 공분산의 요소는 일반적으로 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \quad (\text{H.9})$$

여기서

$$y_l = f_l(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

이다.

식 (H.9)는 q_l 에 상관이 있는 경우 ISO 지침서 F.1.2.3의 식 (F.2)을 일반화시킨 것이다. 출력량의 추정상관계수는 식 (5.9)에서 나타낸 것과 같이 $r(y_l, y_m) = u(y_l, y_m)/u(y_l)u(y_m)$ 으로 주어진다. 공분산행렬의 대각요소

$u(y_l, y_l) \equiv u^2(y_l)$ 은 출력량 y_l 의 추정분산이고, $m=1$ 에 대해 식 (H.9)은 식 (5.10)과 동일하다. 식 (H.9)를 이 예에 적용시키기 위하여, 다음과 같이 정한다.

$$\begin{array}{lll} y_1 = R & x_1 = \bar{V} & u(x_i) = \mathcal{L}(x_i) \\ y_2 = X & x_2 = \bar{I} & N=3 \\ y_3 = Z & x_3 = \bar{\phi} & \end{array}$$

R, X, Z 의 계산결과와 그들의 추정분산, 상관계수들은 표 H.3에 나타내었다.

H.2.4 결과 : 방법 2

방법 2는 표 H.4에 요약되어 있다.

데이터는 세 개의 입력량 V, I, ϕ 의 5개 조의 관측값으로서 얻어졌기 때문에 입력 데이터의 각 조로부터 R, X, Z 의 값을 계산할 수 있고, R, X, Z 의 최상의 추정치를 구하기 위하여 5개 값의 산술평균을 구한다. 각 평균의 시험표준편차 (그것의 합성준불확도)는 5개 각각의 값으로부터 일반적인 방법으로 계산된다[식 (4.5) 참조]. 3개의 평균값의 추정분산은 평균을 구한 5개의 각각의 값에 식 (5.14)를 직접 적용함으로써 계산된다. 두 가지 방법에 의해서 제공되는 출력량, 표준불확도, 추정 공분산은 \overline{VI} 와 $\overline{\cos\phi}$ 항을 \overline{VI} 와 $\overline{\cos\phi}$ 항으로 치환함으로써 나타나는 효과 이외에는 차이가 없다.

표 H.4 - 출력량 R, X, Z 의 계산값 (방법 2)

군 번호 k	측정량의 개별값		
	$R = \frac{V}{I} \cos \phi$ (Ω)	$X = \frac{V}{I} \sin \phi$ (Ω)	$Z = \frac{V}{I}$ (Ω)
1	127.67	220.32	254.64
2	127.89	219.79	254.29
3	127.51	220.64	254.84
4	127.71	218.97	253.49
5	127.88	219.51	254.04
산술평균	$y_1 = \bar{R} =$ 127.732	$y_2 = \bar{X} =$ 219.849	$y_3 = \bar{Z} =$ 254.260
평균의시험 표준편차	$s(\bar{R}) =$ 0.071	$s(\bar{X}) =$ 0.295	$s(\bar{Z}) =$ 0.236
상 관 계 수 $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(\bar{R}, \bar{X}) = -0.588$ $r(y_1, y_3) = r(\bar{R}, \bar{Z}) = -0.458$ $r(y_2, y_3) = r(\bar{X}, \bar{Z}) = 0.993$			

이 방법을 설명하기 위하여 표 H.4에 5개조의 관측값의 각각으로부터 계산된 R, X 및 Z 의 값을 나타내었다. 산술평균, 표준불확도 및 추정상관계수는 이들 각각의 값으로부터 직접 계산된다. 이 방법에서 얻어진 수치 결과는 표 H.3에서 주어진 결과에 비해 무시할 수 있을 정도의 차이가 있을 뿐이다.

4.1.4의 [주]에서 용어에서, 방법 1은 y 를 $y=f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ 로부터 구하는 한 예이고, 방법 2는 추정치 y 를 $\bar{Y}=(\sum_{k=1}^n Y_k)/n$ 으로부터 구하는 한 예이다. [주]에서 설명한 바와 같이 만약 f 가 그 입력량의 선형함수라고 한다면(방법 1을 실행할 때 시험적으로 관측된 상관계수가 주어졌다면), 일반적으로 두가지 방법은 동일한 결과를 얻게 될 것이다. 만약 f 가 선형함수가 아니라면, 비선형성의 정도와 X_i 의 추정분산과 공분산에 의존하여 방법1의 결과는 방법 2의 결과와 다르게 될 것이다. 이것은 다음식에서 볼 수 있다.

$$y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{X}_i \partial \bar{X}_j} u(\bar{X}_i, \bar{X}_j) + \dots$$

여기서 우변의 제 2항은 f 를 \bar{X}_i 항으로 테일러 급수전개시킬 때의 제2차항이다(5.1.1의 [주] 4, 식 (5.4) 참조). 이 예의 경우, 근사식 $y=f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ 를 피하고, 또 사용된 측정순서(데이터는 각 조에서 실제로 얻어진 것임)를 더 좋게 반영하였기 때문에 방법 2가 더 좋다.

반면에 만약 표 H.2의 데이터가 전위차 V 에 대해 $n_1=5$ 의 관측값을, 전류 I 에 대해 $n_2=5$ 의 관측값을, 계속해서 위상 ϕ 에 대해 $n_3=5$ 의 관측값을 순서대로 얻어진 것이라면 방법 2는 부적당하다. 또 만약 $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ 라면 실행이 불가능하게 된다(사실 고정 임피던스의 양단에 걸려 있는 전위차와 그것을 통해 흐르는 전류는 직접 관련이 되기 때문에 이러한 순서로서 측정한다는 것은 좋지 않다).

방법 2가 부적당하기 때문에 표 H.2의 데이터가 이 방법에서 다시 해석된다면 또 V, I, ϕ 사이에 상관관계가 없다면, 관측된 상관계수는 크지 않고 0으로 되어야 한다. 만약 표 H.2에서 이를 수행하면 식 (H.9)는 식 (5.15)의 맨 아래 식과 같이 간소화 된다. 즉

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} u^2(x_i) \quad (\text{H.10})$$

이고, 표 H.2의 데이터에 이 식을 적용하면 표 H.3은 표 H.5와 같이 수정된다.

표 H.5 - 표 H.2의 상관계수가 0이라고 가정한 상태에서의 표 H.3의 변경

측정결과의 합성표준불확도 $u_c(y_l)$
$u_c(R) = 0.195 \text{ } \Omega$ $u_c(R)/R = 0.15 \times 10^{-2}$
$u_c(X) = 0.201 \text{ } \Omega$ $u_c(X)/X = 0.09 \times 10^{-2}$
$u_c(Z) = 0.204 \text{ } \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0.08 \times 10^{-2}$
상관계수 $r(y_l, y_m)$
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = 0.056$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = 0.527$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0.878$

H.3 온도계 교정

이 예제는 최소제곱법을 이용하여 선형 교정곡선을 구하는 법과 그 결과인 절편과 기울기 그리고 각각의 추정분산과 공분산을 이용하여 교정곡선으로 부터 예측되는 보정값과 표준불확도를 어떻게 구하는가에 대한 예제이다.

H.3.1 측정의 문제

온도계의 교정을 다음과 같이 하였다. 각각 무시할 수 있는 불확도로 21 °C에서 27 °C까지의 범위에서 $n = 11$ 개의 온도를 읽은 값 t_k 를 알려진 기준온도 $t_{R,k}$ 와 비교하여 읽은 값에 대한 보정값 $b_k = t_{R,k} - t_k$ 를 구하였다. 이 보정값은 t_k 의 값이 임의의 정확한 기준온도일때는 일정한 값 만큼 차이가 발생하고, 기준온도를 벗어나면 일정한 배수에 비례하여 차이가 발생한다고 하자. 그러면 보정값은

$$b_k = t_{R,k} - t_k = \beta_1 + \beta_2(t_k - t_0) + e_k, \quad k=1, \dots, n$$

의 선형교정곡선으로 가정할 수 있다. 여기서 e_k 는 오차이다. 위의 모형에서 측정된 보정값 b_k 와 측정된 온도 t_k 는 평가의 입력량들이다. 선형교정

곡선은

측정된 보정값과 온도에 대하여 최소제곱법에 의해

$$b(t) = y_1 + y_2(t-t_0) \quad (\text{H.11})$$

에 맞추어진다. 맞춤곡선의 절편과 기울기인 y_1 과 y_2 는 β_1 와 β_2 의 추정값으로서, 결정하고자 하는 두개의 측정량 또는 출력량이다. 온도 t_0 는 편의상 정한 정확한 기준온도이며 최소제곱법으로 결정할 독립변수가 아니다. 일단 y_1 과 y_2 가 각각의 추정분산과 공분산과 함께 결정되면 식 (H.11)을 사용하여 임의의 온도값 t 에 대해 온도계에 적용시킬 보정값과 표준불확도를 예측할 수 있다.

H.3.2 최소제곱법에 의한 맞춤

최소제곱법에 의거하여, 그리고 위의 H.3.1에서 언급된 가정하에 출력량 y_1 과 y_2 그리고 각각의 추정분산과 공분산은 다음의 합을 최소화하여 구한다.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n e_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n [b_k - \beta_1 - \beta_2(t_k - t_0)]^2 \end{aligned}$$

이로부터 다음의 식들을 구할 수 있다; y_1 과 y_2 , 각각의 시험분산 $s^2(y_1)$ 과 $s^2(y_2)$, 그리고 추정상관계수 $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2) / (s(y_1)s(y_2))$. 여기에서 $s(y_1, y_2)$ 는 추정공분산이다 :

$$y_1 = \hat{\beta}_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k \theta_k)(\sum \theta_k)}{D} \quad (\text{H.12a})$$

$$y_2 = \hat{\beta}_2 = \frac{n \sum b_k \theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D} \quad (\text{H.12b})$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2 \sum \theta_k^2}{D} \quad (\text{H.12c})$$

$$s^2(y_2) = n \frac{s^2}{D} \quad (\text{H.13d})$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n \sum \theta_k^2}} \quad (\text{H.12e})$$

$$s^2 = \frac{\sum [b_k - b(t_k)]^2}{n-2} \quad (\text{H.12f})$$

$$\begin{aligned} D &= n \sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 \\ &= n \sum (\theta_k - \bar{\theta})^2 = n \sum (t_k - \bar{t})^2 \end{aligned} \quad (\text{H.12g})$$

여기서 모든 합은 $k=1$ 부터 n 까지이고,

$$\theta_k = t_k - t_0, \quad \bar{\theta} = \frac{(\sum \theta_k)}{n} \quad \text{그리고} \quad \bar{t} = (\sum t_k)/n \text{이며,}$$

$[b_k - b(t_k)]$ 는 온도 t_k 에서 측정된 또는 관측된 보정값 b_k 와 같은 온도에서 맞춤곡선 $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ 로부터 예측되는 보정값 $b(t_k)$ 사이의 차이이다. 분산 s^2 는 맞춤의 전체적인 불확도의 척도이다. 여기에서 $n-2$ 인자는 n 개의 관측값으로부터 두개의 추정값 y_1 과 y_2 를 결정하였기 때문에 s^2 의 자유도는 $\nu = n - 2$ 라는 사실을 반영한다(ISO 지침서 G.3.3 참조).

H.3.3 결과의 계산

맞춤에 사용할 데이터는 표 H.6의 두번째 및 세번째 열에 있다. $t = 20^\circ\text{C}$ 를 기준온도로 하고 식 (H.12a)에서 (H.12g)를 적용하면 다음과 같은 것들을 얻는다.

$$y_1 = -0.1712^\circ\text{C} \quad s(y_1) = 0.0029^\circ\text{C}$$

$$y_2 = 0.00218 \quad s(y_2) = 0.00067$$

$$r(y_1, y_2) = -0.930 \quad s = 0.0035^\circ\text{C}$$

기울기 y_2 가 그것의 표준불확도 보다 3배 이상 크다는 사실이 말해주는 것처럼 어떤 고정된 평균에 의한 보정보다도 교정곡선에 의한 보정이 적절함을 알 수 있다. 교정곡선은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$b(t) = -0.1712(29)^\circ\text{C} + 0.00218(67)(t - 20^\circ\text{C}) \quad (\text{H.13})$$

표 H.6 - 최소자승법으로 온도계의 선형교정곡선을 얻기 위해 사용한 데이터

측정번호 k	온도계 값 t_k (°C)	관측 보정값 $b_k = t_{R,k} - t_k$ (°C)	예 측 보 정 값 $b(t_k)$ (°C)	관측값- 예측값 $b_k - b(t_k)$ (°C)
1	21.521	-0.171	-0.1679	-0.0031
2	22.012	-0.169	-0.1668	-0.0022
3	22.512	-0.166	-0.1657	-0.0003
4	23.003	-0.159	-0.1646	+0.0056
5	23.507	-0.164	-0.1635	-0.0005
6	23.999	-0.165	-0.1625	-0.0025
7	24.513	-0.156	-0.1614	+0.0054
8	25.002	-0.157	-0.1603	+0.0033
9	25.503	-0.159	-0.1592	+0.0002
10	26.010	-0.161	-0.1581	-0.0029
11	26.511	-0.160	-0.1570	-0.0030

여기에서 괄호 내의 숫자는 절편과 기울기에 대해 인용된 결과에서 마지막 자리수에 해당하는 것으로 언급된 표준불확도 값이다 (7.2.1 참조). 이 식은 어떤 온도 t 에서의 보증값 $b(t)$ [특히 $t=t_k$ 일때의 값 $b(t_k)$]를 예측할 수 있게 한다. 이 값은 표 H.6의 4번째 열에 있다. 마지막 열은 측정값과 예측값 사이의 차이 $b_k - b(t_k)$ 이다. 이 차이값을 분석하여 선형 모델의 타당성을 검증할 수 있다; 검증방법은 있지만 이 예제에서는 다루지 않겠다[참조: Fuller, W. A. (1987), Measurement error models, John Wiley (New York, N. Y.)].

H.3.4 예측값의 불확도

보정의 예측값의 합성표준불확도 표현은 5.2.2의 불확도 전파의 법칙인, 식 (5.10)을 식 (H.11)에 적용하여 쉽게 구할 수 있다. $b(t) = f(y_1, y_2)$ 인 것을 알고 $u(y_1) = s(y_1)$ 로 그리고 $u(y_2) = s(y_2)$ 로 쓰면 다음의 식을 구할

수 있다.

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1) + (t-t_0)^2 u^2(y_2) + 2(t-t_0)u(y_1)u(y_2)r(y_1, y_2) \quad (\text{H.14})$$

추정분산 $u_c^2[b(t)]$ 는 $t_{\min} = t_0 - u(y_1)r(y_1, y_2)/u(y_2)$ 에서 최소이고 여기에서는 $t_{\min} = 24.0085 \text{ }^\circ\text{C}$ 이다.

식 (H.14)를 사용하는 예제로서 다음을 생각해 보자. 어떤 사람이 $t=30 \text{ }^\circ\text{C}$ 에서의 온도계의 보정을 필요로 한다고 하자. 이 온도는 온도계가 실제로 교정된 온도범위를 벗어난 것이다. 식 (H.13)에 $t=30 \text{ }^\circ\text{C}$ 를 대입하면 $b(30 \text{ }^\circ\text{C}) = -0.1494 \text{ }^\circ\text{C}$ 가 되고

식 (H.14)로부터

$$\begin{aligned} u_c^2[b(30 \text{ }^\circ\text{C})] &= (0.0029 \text{ }^\circ\text{C})^2 + (10 \text{ }^\circ\text{C})^2(0.00067)^2 \\ &\quad + 2(10 \text{ }^\circ\text{C})(0.0029 \text{ }^\circ\text{C})(0.00067)(-0.930) \\ &= 17.1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^2 \end{aligned}$$

이며,

$$u_c[b(30 \text{ }^\circ\text{C})] = 0.0041 \text{ }^\circ\text{C}$$

를 얻게 된다. 이렇게 하여 $30 \text{ }^\circ\text{C}$ 에서의 보정값은 $-0.1494 \text{ }^\circ\text{C}$ 이고 합성표준 불확도 $u_c = 0.0041 \text{ }^\circ\text{C}$ 이며 u_c 는 $v = n - 2 = 9$ 의 자유도를 갖는다.

H.3.5 기울기와 절편 사이의 상관관계 제거

상관계수 $r(y_1, y_2)$ 를 나타낸 식 (H.12e)가 의미하는

$$\sum_{k=1}^n \Theta_k = \sum_{k=1}^n (t_k - t_0) = 0 \text{ 이 되도록 } t_0 \text{ 를 선택하면 } r(y_1, y_2) = 0 \text{ 이 되고}$$

y_1 과 y_2 는 상관관계가 없게 되며, 그에 따라 예측하는 보정의 표준불확도

계산이 간단해진다는 것이다. $t_0 = \bar{t} = \sum_{k=1}^n t_k/n$ 일때 (여기에서는 $\bar{t} =$

$24.0085 \text{ }^\circ\text{C}$ 일때) $\sum_{k=1}^n \Theta_k = 0$ 이 되므로 $t_0 = \bar{t} = 24.0085 \text{ }^\circ\text{C}$ 를 사용하여 최

소제곱 맞춤을 다시 하게 되면 상관관계가 없는 y_1 과 y_2 의 값들이 나오게

된다(온도 \bar{t} 는 또한 $u^2[b(t)]$ 가 최소인 온도이다. H.3.4 참조). 그러나 다음과 같은 이유로 맞춤을 다시 반복하는 것은 필요없다.

$$b(t) = y_1' + y_2(t - \bar{t}) \quad (\text{H.15a})$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2) \quad (\text{H.15b})$$

$$r(y_1', y_2) = 0 \quad (\text{H.15c})$$

여기에서

$$y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)r(y_1, y_2)/s(y_2)$$

$$s^2(y_1') = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]$$

이 고 식 (H.15b)를 쓰는데 있어서 $u(y_1') = s(y_1')$ 와 $u(y_2) = s(y_2)$ 로 대체하였다[식 (H.14) 참조].

이 관계식들을 H.3.3에서 주어진 결과들에 적용하면 다음과 같은 것들을 얻는다.

$$b(t) = -0.1625(11)$$

$$+ 0.00218(67)(t - 24.0085 \text{ } ^\circ\text{C})$$

(H.16a)

$$u_c^2[b(t)] = (0.0011)^2 + (t - 24.0085 \text{ } ^\circ\text{C})^2(0.00067)^2$$

(H.16b)

이 표현들이 식 (H.13)과 (H.14) $u_c[b(30 \text{ } ^\circ\text{C})]$ 과 같은 결과를 준다는 것은 $b(30 \text{ } ^\circ\text{C})$ 와 를 다시 계산하여 검증할 수 있다. $t = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$ 를 식 (H.16a)과 (H.16b)에 대입하면 $b(30 \text{ } ^\circ\text{C}) = -0.1494 \text{ } ^\circ\text{C}$

$$u_c[b(30 \text{ } ^\circ\text{C})] = 0.0041 \text{ } ^\circ\text{C}$$

을 얻을 수 있고 이는 H.3.4에서 얻은 결과와 동일한 것을 알 수 있다. 두 개의 예측 보정값 $b(t_1)$ 과 $b(t_2)$ 간의 추정 공분산은 H.2.3의 식 (H.9)로부터 구할 수 있다.

H.3.6 다른 고려사항

최소제곱법을 사용하여 높은 차수의 곡선을 데이터 값들에 맞출 수 있으며 또한 각각의 데이터 값들이 불확도를 갖고 있는 경우에 적용할 수도 있다. 상세한 것은 이 주제에 대한 참고서적들을 참조해야한다. 그러나 다음의 예제는 측정된 보정 b_k 가 정확히 알려져 있지 않은 경우에서의 두가지 예를 들었다.

- 1) t_k 의 불확도는 무시할 수 있다고 하자. n 개의 값 $t_{R,k}$ 각각은 일련의 m 회의 반복측정으로 얻었고 수 개월에 걸쳐서 얻은 많은 양의 데이터에 근거한 같은 류의 값들에 대한 합동추정분산(4.2.4절 또는 4.2.4절의 [주] 참조)이 s_p^2 라고 하자. 이렇게 하면 각각의 $t_{R,k}$ 에서의 추정분산은 $s_p^2/m = u_0^2$ 이고 각각의 관측된 보정값 $b_k = t_{R,k} - t_k$ 는 동일한 표준불확도 u_0 를 갖는다. 이러한 환경하에서는(그리고 선형모델이 정확하다는 가정하에서) 식 (H.12c)와 (H.12d)에서의 s^2 을 u_0^2 로 대체한다.
- 2) 각각의 t_k 는 무시할 만한 불확도를 갖고, n 개의 값 $t_{R,k}$ 의 각각에 보정값 ε_k 를 적용하고 그리고 각각의 보정값은 동일한 표준불확도 u_a 를 갖는다고 가정하자. 그러한 경우 각각의 $b_k = t_{R,k} - t_k$ 의 표준불확도 역시 u_a 이고 $s^2(y_1)$ 는 $s^2(y_1) + u_a^2$ 로 대체되고 $s^2(y'_1)$ 는 $s^2(y'_1) + u_a^2$ 로 대체된다.

H.4 방사능 측정

방사능 측정의 예는 서로 다른 두 가지 방법으로 데이터를 분석할 수 있으나 각각은 본질적으로 동일한 수치적 결과를 얻는 저항과 유도저항의 동시측정을 설명한 예 H.2와 유사하다. 그 첫번째 방법은 입력되는 양들 사이의 관측된 상관관계에 대한 평가의 필요성을 다시 한번 설명하는 것이다.

H.4.1 측정의 문제

물 시료 중의 라돈(^{222}Rn) 방사능 농도는 방사능을 알고 있는 수중라돈 표준시료를 사용한 액체섬광계수방법에 의해 결정되어 진다. 이 물시료 중에 미지의 라돈 방사능 농도는 22 mL의 바이알(vial)병 내에 약 5 g의 물과 12 g의 유기섬광체가 들어 있는 3개의 계수선원을 측정함으로써 구할 수 있다;

선원 (a): 방사능 농도를 알고 있는 질량 m_s 의 표준용액으로 구성된 표준 선원

선원 (b): 방사성 물질이 포함되어 있지 않은 공백(blank) 물 시료, 기저방사선 계수율 측정에 사용됨

선원 (c): 미지의 방사능 농도를 가진 질량 m_x 의 수용액으로 구성된 시료

이들 3개의 계수 선원은 표준 선원 - 공백선원 - 물 시료의 순서로 6번 반복 측정되어지며, 6번의 반복 측정 동안 각각의 선원에 대하여 불감시간을 보정한 계수시간 T_0 는 60분이다. 비록 기저방사선(background) 계수율이 전체 계수시간(65 시간) 동안 일정한 값을 가진다고 예상할 수는 없지만 각각의 공백 선원으로부터 구한 계수값은 동일한 순서로 측정되는 표준 선원과 물 시료의 측정시간 동안 기저방사선 계수율의 대표값으로 사용될 수 있다. 측정 데이터는 표 H.7에 나타냈으며, 여기서 t_s, t_B, t_x 는 표준 선원, 공백 시료, 측정 시료의 바이알 각각에 대하여 기준시간 $t=0$ 로부터 불감시간(dead time)을 보정한 계수시간 $T_0=60$ 분의 중앙점에 해당하는 시간들이다. 비록 t_B 는 확실하게 하기 위하여 주어졌으나 분석에서는 사용되어지지 않는다.

C_S, C_B, C_x 는 표준 선원, 공백 시료, 측정 시료 바이알 각각에 대하여 불감시간을 보정한 계수시간

$T_0=60$ 분 동안 측정된 계수값들이다.

측정된 계수값들은 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$C_S = C_B + \varepsilon A_S T_0 m_S e^{-\lambda t_s} \quad (\text{H.17a})$$

$$C_x = C_B + \varepsilon A_x T_0 m_x e^{-\lambda t_x} \quad (\text{H.17b})$$

여기서

ε : 주어진 선원 구성 하에서 ^{222}Rn 에 대한 액체섬광검출 효율이며 방사능 준위와는 무관하다고 가정한다.

A_S : 기준시간 $t=0$ 에서 표준 선원의 방사능 농도

A_x : 기준시간 $t=0$ 에서 측정시료의 미지 방사능 농도

m_S : 표준용액의 질량

m_x : 시료용액의 질량

λ : ^{222}Rn 의 붕괴상수

$$\text{즉, } \lambda = (\ln 2) / T_{1/2} = 1.25894 \times 10^{-4} \text{ min}^{-1}$$

$$(T_{1/2} = 5505.8 \text{ min})$$

표 H.7 - 미지시료의 방사능농도 결정을 위한 계수 데이터

Cycle	표준선원		공백시료		측정시료	
	t_s (분)	C_s (계수값)	t_B (분)	C_B (계수값)	t_x (분)	C_x (계수값)
1	243.74	15 380	305.56	4054	367.37	41 432
2	984.53	14 978	1046.10	3922	1107.66	38 706
3	1723.87	14 394	1785.43	4200	1846.99	35 860
4	2463.17	13 254	2524.73	3830	2586.28	32 238
5	3217.56	12 516	3279.12	3956	3340.68	29 640
6	3956.83	11 058	4018.38	3980	4079.94	26 356

식(H.17a)와 (H.17b)는 표준 선원과 측정시료 방사능의 지수함수적 붕괴와 한 cycle에서 다른 cycle까지의 기저 방사능 값의 근소한 변화 때문에 표 H.7에서 주어진 C_S 와 C_x 각각의 6개 값들에 대한 평균값을 직접 구할 수 없음을 나타낸다. 따라서 방사성 붕괴와 기저 방사선을 보정한 계수값 또는 계수율(계수값을 측정시간 $T_0 = 60$ 분으로 나눈값)로 취급하여야 한다. 이는 값을 알고 있는 양들의 향으로써 미지의 방사능 농도를 구하기 위하여 아래와 같이 식 (H.17a)와 (H.17b)를 조합하는 것을 제시하고 있다.

$$\begin{aligned}
 A_x &= f(A_S, m_S, m_x, C_S, C_x, C_B, t_S, t_x, \lambda) \\
 &= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B) e^{\lambda t_x}}{(C_S - C_B) e^{\lambda t_S}} \\
 &= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)}{(C_S - C_B)} e^{\lambda(t_x - t_S)}
 \end{aligned}
 \tag{H. 18}$$

여기서 $(C_x - C_B) e^{\lambda t_x}$ 와 $(C_S - C_B) e^{\lambda t_S}$ 는 각각 측정시간 60 분에 대하여 기준시간 $t = 0$ 에서 기저 방사선을 보정한 측정시료와 표준 선원의 계수값들이다. 위 식은 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 A_x &= f(A_S, m_S, m_x, R_S, R_x) \\
 &= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{R_x}{R_S}
 \end{aligned}
 \tag{H.19}$$

여기서 기저 방사선과 방사성 붕괴를 보정한 계수율 R_x, R_S 는 다음과 같이 주어진다.

$$R_x = [(C_x - C_B) / T_0] e^{\lambda t_x} \tag{H.20a}$$

$$R_S = [(C_S - C_B) / T_0] e^{\lambda t_S} \tag{H.20b}$$

표 H.8 - 방사성 붕괴와 기저방사능을 보정한 계수율의 계산

Cycle <i>k</i>	R_x (min ⁻¹)	R_S (min ⁻¹)	$t_x - t_S$ (min)	$R = R_x/R_S$
1	652.46	194.65	123.63	3.3520
2	666.48	208.58	123.13	3.1953
3	665.80	211.08	123.12	3.1543
4	655.68	214.17	123.11	3.0615
5	651.87	213.92	123.12	3.0473
6	623.31	194.13	123.11	3.2107
	$\bar{R}_x = 652.60$ $s(\bar{R}_x) = 6.42$ $s(\bar{R}_x)/\bar{R}_x = 0.98 \times 10^{-2}$	$\bar{R}_S = 206.09$ $s(\bar{R}_S) = 3.79$ $s(\bar{R}_S)/\bar{R}_S = 1.84 \times 10^{-2}$		$\bar{R} = 3.170$ $s(\bar{R}) = 0.046$ $s(\bar{R})/\bar{R} = 1.44 \times 10^{-2}$
	$\bar{R}_x/\bar{R}_S = 3.167$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S) = 0.045$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)/(\bar{R}_x/\bar{R}_S) = 1.42 \times 10^{-2}$			
	상 관 계 수			
	$r(\bar{R}_x, \bar{R}_S) = 0.646$			

H.4.2 데이터 분석

표 H.8에는 앞에서 주어진 표 H.7의 데이터와 $\lambda = 1.25894 \times 10^{-4} \text{ min}^{-1}$ 를 사용하여 식 (H.20a)와 (H.20b)로부터 산출된 기저 방사선과 방사성 붕괴를 보정한 계수율 R_x, R_S 를 요약하여 나타내었다. 여기서 비율

$R = R_x / R_S$ 는 $(C_x - C_B) / (C_S - C_B) e^{\lambda(t_x - t_S)}$ 의 식으로부터 간단하게 계산되어질 수 있다. 산술평균 $\bar{R}_x, \bar{R}_S, \bar{R}$ 과 이들의 시험표준편차 $s(\bar{R}_x), s(\bar{R}_S), s(\bar{R})$ 은 일반적인 방법으로 구할 수 있다 [식 (4.3)과 (4.5)]. 상관계수 $r(\bar{R}_x, \bar{R}_S)$ 는 식 (5.14)와 식 (5.9)로부터 산출된다.

R_x, R_S 는 상대적 변화가 작기 때문에 이들 평균값의 비 \bar{R}_x / \bar{R}_S 와 표준불확도 $u(\bar{R}_x / \bar{R}_S)$ 는 각각 표 H.8의 마지막 열에서 나타낸 바와 같이 평균비 \bar{R} 과 이의 시험적 표준편차 $s(\bar{R})$ 과 거의 같은 값을 가진다 [H.2.4와 식(H.10) 참조]. 한편 표준불확도 $u(\bar{R}_x / \bar{R}_S)$ 를 산출하는데 있어서, 상관계수 $r(\bar{R}_x, \bar{R}_S)$ 에 의해 나타낼 수 있는 R_x 와 R_S 의 상관관계는 식 (5.10)을 사용하여 계산해 주어야 한다[이 식은 식 (H.21b)의 마지막 3개항인 \bar{R}_x / \bar{R}_S 의 상대추정분산을 산출한다.]

R_x 와 R_S 각각의 시험 표준편차 $\sqrt{6} s(\bar{R}_x)$ 와 $\sqrt{6} s(\bar{R}_S)$ 는 계수과정의 Poisson 통계에 의한 변동도 보다 두세배 이상의 분산을 나타낸다는 것을 인식하여야 한다. 후자는 계수값의 관측된 분산 내에 포함되어지며 별도로 계상할 필요는 없다.

H.4.3 최종결과의 산출

미지의 방사능 농도 A_x 와 합성표준불확도 $u_c(A_x)$ 를 식 (H.19)로부터 구

하기 위해서는 A_x , m_x 와 m_s 와 이들의 표준불확도를 알아야 한다. 이들 값은 다음과 같이 주어진다.

$$A_s = 0.1368 \text{ Bq/g}$$

$$u(A_s) = 0.0018 \text{ Bq/g}; u(A_s)/A_s = 1.31 \times 10^{-2}$$

$$m_s = 5.0192 \text{ g}$$

$$u(m_s) = 0.005 \text{ g}; u(m_s)/m_s = 0.10 \times 10^{-2}$$

$$m_x = 5.0571 \text{ g}$$

$$u(m_x) = 0.0010 \text{ g}; u(m_x)/m_x = 0.02 \times 10^{-2}$$

다음에 주어진 불확도 요인의 다른 가능한 인자들은 무시할 수 있는 것으로 나타났다.

- 붕괴시간의 표준 불확도, $u(t_{s,k})$ 와 $u(t_{x,k})$
- ^{222}Rn 붕괴상수 λ 의 표준 불확도, $u(\lambda) = 1 \times 10^{-7} \text{ min}^{-1}$ (여기서 중요한 양은 붕괴인자 $e^{\lambda(t_x - t_s)}$ 이다). 이 값은 $k = 4$ 와 6 의 1.01563 부터 $k=1$ 의 1.01570 까지 변하며 이들 값의 표준 불확도 u 는 1.2×10^{-5} 이다.
- 측정에 사용된 (표준선원, 공백시료, 측정시료)선원에 대하여 섬광 계수기의 검출효율 의존성과 관련된 불확도
- 계수기 불감시간에 대한 보정과 방사능 준위에 의한 계수효율의 의존성에 대한 보정의 불확도

H.4.3.1 결과 : 방법 1

앞에서 이미 언급된 바와 같이 A_x 와 $u_c(A_x)$ 는 식 (H.19)를 사용하여 두가지 다른 방법으로부터 얻을 수 있다. 첫 번째 방법으로서 A_x 는 산술평균 값 \bar{R}_x 와 \bar{R}_s 를 사용하여 산출되며 다음과 같다.

$$A_x = A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{R_x}{R_s} = 0.4300 \text{ Bq/g} \quad (\text{H. 21a})$$

위의 식에 식 (5.10)을 적용하면 합성분산 $u_c^2(A_x)$ 를 구하기 위한 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} \\ &= \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} \\ &+ \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\bar{R}_x)}{\bar{R}_x^2} + \frac{u^2(\bar{R}_S)}{\bar{R}_S^2} \\ &- 2r(\bar{R}_x, \bar{R}_S) \frac{u(\bar{R}_x)u(\bar{R}_S)}{\bar{R}_x \bar{R}_S} \end{aligned} \quad (\text{H. 21b})$$

여기서, H.4.2에서 언급한 바와 같이, 마지막 3개 항들로부터 \bar{R}_x/\bar{R}_S 의 상대추정분산 $u^2(\bar{R}_x/\bar{R}_S)/(\bar{R}_x/\bar{R}_S)^2$ 를 얻을 수 있다. H.2.4에서 언급한 바와 같이 표 H.8에 나타난 결과들은 \bar{R} 이 \bar{R}_x/\bar{R}_S 와 정확하게 일치하지는 않고 또한 \bar{R}_x/\bar{R}_S 의 표준 불확도 $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)$ 가 \bar{R} 의 실험 표준편차 $s(\bar{R})$ 와 정확하게 일치하지 않는다는 것을 보이고 있다.

식 (H.21a)와 (H.21b)에 관련 양들의 값을 대입하면,

$$\frac{u_c}{A_x} = 1.93 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0.0083 \text{ Bq/g}$$

따라서 측정결과는 다음과 같이 기술할 수 있다;

$$A_x = 0.4300 \text{ Bq/g}$$

$$\text{합성표준불확도 : } u_c = 0.0083 \text{ Bq/g}$$

H.4.3.2 결과 : 방법 2

R_x 와 R_S 의 상관관계를 무시하는 2번째 방법에서, A_x 는 산술평균 \bar{R} 를 사용하여 산출되어진다. 즉,

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \bar{R} = 0.4304 \text{ Bq/g} \quad (\text{H.22a})$$

$u_c^2(A_x)$ 는 단순히 ;

$$\begin{aligned} \frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} &= \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} \\ &+ \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\bar{R})}{\bar{R}^2} \end{aligned} \quad (\text{H.22b})$$

로 되며 다음의 값을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{u_c(A_x)}{A_x} &= 1.95 \times 10^{-2} \\ u_c(A_x) &= 0.0084 \text{ Bq/g} \end{aligned}$$

따라서 측정결과는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_x = 0.4304 \text{ Bq/g}$$

합성표준불확도 : $u_c = 0.0084 \text{ Bq/g}$

u_c 의 유효 자유도는 H.1.6에서 기술된 방법으로 Welch-Satterthwaite 합수를 사용하여 평가될 수 있다.

H.2에서와 같이 두 결과 중에서 후자의 방법이 두 양의 평균값의 비에 의해 두 양의 비의 평균값으로 근사시키지 않기 때문에 더 많이 사용되고 있으며, 또한 이 데이터들은 실제로 서로 독립적인 cycle로 수집되었기 때문에 두 번째 방법이 사용된 측정 과정을 더욱 잘 반영하고 있다.

그럼에도 불구하고 이들 두가지 방법에 의해 산출된 A_x 값들의 차이는 어느 한 방법에서의 표준불확도와 비교할 때 아주 작게 나타나고 있으며, 또한 두 방법에 의해 산출된 표준불확도들의 차이는 완전히 무시될 수 있다. 이러한 일치는 관측된 상관관계가 적절히 포함되어졌을 때 이들 두 방법이 동등하다는 것을 보여주고 있다.

H.5 분산분석(ANOVA: Analysis of Variance)

다음 사례는 분산분석 방법을 간단히 소개한 것이다. 이러한 통계기법은 측정결과의 불확도를 평가할 때 측정에 있어서 개별 우연효과가 적절히 고

려되도록 이들을 식별하고 정량화하기 위해 사용된다. 분산분석은, 예를 들어 제너전압 표준기나 질량표준기와 같은 교정용 표준기의 교정이나 표준물질의 인증 등에서의 측정에서 광범위하게 적용될 수는 있어도, 그 자체만으로는 계통효과를 식별하지 못한다. 분산분석은 일반적 용어이며 분산분석에는 여러 다른 모델이 존재하고 있다.

본 사례에서 논의될 특정모델은, 그 중요성을 감안하여 균형지분배치 (balanced nested design)에 대한 것을 선택하였다. 본 모델에서의 수치사례는 제너전압 표준기의 교정에 대한 것이며, 분석은 여러 다양한 실제적인 측정상황과 관련되어야 한다.

분산분석 방법은 ISO 지침서 35 [19]에서 충분히 취급한 시험소간 시험에 의한 표준물질의 인증에서는 특별한 중요성을 갖는다(이러한 표준물질 인증에 대한 개략적인 내용은 H.5.3.2 참조). ISO 지침서 35에 수록된 많은 자료들은 폭넓게 적용될 수 있기 때문에 비균형 지분배치를 포함한 분산분석과 관련하여 추가로 상세한 내용이 필요할 경우에는 이 간행물을 참고하여도 좋다.

참고문헌 [15]와 [20]도 마찬가지로 참고될 수 있다.

H.5.1 측정문제

안정된 전압표준기에 대해 2주일 이상 교정되는 명목값 10 V의 제너 전압표준기에 대해 고려해 본다. 교정기간중 J일간 매일 표준기의 전위차 V_s 를 K번 독립적으로 반복관측한다. 만일 V_{jk} 가 j번째일($j=1, 2, \dots, J$)에 V_s 에 대한 k번째 관측($k=1, 2, \dots, K$)을 나타낸다면, 표준기의 전위차에 대한 최적 추정값은 JK개의 관측값의 산술평균 \bar{V} 가 된다[4.2.1의 식(3) 참조].

$$V_s = \frac{1}{JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K V_{jk} = \bar{V} \quad (\text{H.23a})$$

표준기의 전위차의 추정값 \bar{V} 의 불확도를 나타내는 척도인 평균의 시험표준편차 $s(\bar{V})$ 는 다음식으로부터 얻는다. [4.2.3의 식(5) 참조]

$$s^2(\bar{V}) = \frac{1}{JK(K-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V})^2 \quad (\text{H.23b})$$

[주]

본 사례에서는 계통효과를 보상하기 위해 관측값에 가해지는 모든 보정값의 불확도는 무시할 수 있을 정도로 작거나 분석의 최종단계에서 고려하여도 되는 것이라고 생각한다. 후자의 범주에 속하는 보정값의 예는 인증값(주어진 불확도를 갖는다고 가정)과 제너 전압표준기 교정의 기준이 되는 안정 전압표준기의 작동값(working value) 사이의 차이이며, 분석의 마지막 단계에서 관측값의 평균값에 가하는 것이 가능하다. 따라서 관측값으로부터 얻어지는 표준기의 전위차의 추정값은 반드시 측정의 최종 결과가 되는 것이 아니며, 그 추정값의 시험표준편차도 반드시 최종결과의 합성표준 불확도가 되는 것이 아니다.

식(H.23b)으로부터 얻은 평균의 시험표준편차 $s(\bar{V})$ 는 관측값의 일간변동이 하루 사이에 이루어진

관측값의 변동과 같을 때에만 적절한 \bar{V} 의 불확도의 척도가 된다. 만일 일간변동이 일내변동의 기대값보다 상당히 크다는 증거가 있을 때에 시험표

준편차를 사용하는 것은 \bar{V} 의 불확도를 상당히 과소평가하게 될 가능성이 생기게 된다. 따라서 두가지 의문이 생기게 된다. 즉, 일간변동(분산의 일간 성분으로 특성 지워지는)이 일내변동(분산의 일내성분으로 특성 지워지는)과 비교하여 유의할 만한가 아닌가를 어떻게 결정하는가 하는 문제와 만일 유의할 만한 경우라면 평균값의 불확도를 어떻게 평가하는가 하는 문제이다.

H.5.2 수치 예

H.5.2.1 상기 질문을 검토하기 위한 데이터를 표 H.9에 나타내었다. 여기서 $J=10$ 은 전위차의 관측이 이루어진 날짜 수, $K=5$ 는 각 날짜에 이루어진 전위차 관측의 수를 의미하고,

$$\bar{V}_j = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K V_{jk} \quad (\text{H.24a})$$

는 J 번째 날에 이루어진 $K=5$ 개의 전위차 관측값의 산술평균 ($J=10$ 개의 일 평균이 있다),

$$\bar{V} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \bar{V}_j = \frac{1}{JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K V_{jk} \quad (\text{H.24b})$$

는 $J=10$ 개의 일평균의 산술평균, 즉 $JK=50$ 개의 관측값의 전체 평균을 의미하고,

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2$$

(H.24c)

는 j 번째 날에 이루어진 $K=5$ 개의 관측값의 시험분산($J=10$ 개의 분산의 추정값이 있다)을,

$$s^2(\bar{V}_j) = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 \quad (\text{H.24d})$$

는 $J=10$ 개의 일평균의 시험분산을 의미한다 (이러한 분산의 추정값은 1개 뿐이다).

H.5.2.2 관측값의 일내 변동과 일간 변동의 일치성은 분산의 하루 성분 σ_W^2 (즉 같은 날에 수행된 관측값의 분산)의 독립된 두 개의 추정값을 비교해

봄으로서 검토될 수 있다. σ_w^2 의 제1의 추정값(s_a^2 으로 표시)은 매일 평균 \bar{V}_j 의 관측된 변동으로부터 구해진다. \bar{V}_j 는 K 개의 관측값의 평균치이기 때문에, 그의 추정분산 $s^2(\bar{V}_j)$ 은, 분산의 일간 성분이 영이라는 가정 하에서, σ_w^2/K 을 추정한다. 그러면 식 (H.24d)로부터 다음 식이 유도된다.

$$s_a^2 = Ks^2(\bar{V}_j) = \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 \quad (\text{H.25a})$$

이것은 자유도 $\nu_a = J-1 = 9$ 를 지닌 σ_w^2 의 추정값이다. σ_w^2 의 제2의 추정값(s_b^2 으로 표시)은 $J=10$ 개의 독립된 $s^2(V_{jk})$ 의 값으로부터 4.2.4항의 [주]의 식을 사용하여 얻어진 분산의 합동 추정값이다. 여기서 10개의 독립된 값은 식(H.24c)로부터 계산된다. 이 값들의 각각의 자유도는 $\nu_j = K-1$ 이기 때문에, s_b^2 에 대한 최종식은 단지 그들이 평균값이다. 그래서

$$\begin{aligned} s_b^2 &= \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J s^2(V_{jk}) \\ &= \frac{1}{JK-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2 \end{aligned} \quad (\text{H.25b})$$

이 얻어지며, 이것은 자유도 $\nu_b = JK-1 = 40$ 을 지닌 σ_w^2 의 추정값이다. 식(H.25a)와 식(H.25b)에 의해 주어진 σ_w^2 의 추정값은 각각 $s_a^2 = (128 \mu\text{V})^2$

및 $s_b^2 = (85 \mu\text{V})^2$ 이다(표 H.9 참조). 추정값 s_a^2 은 매일 평균의 변동에 기초를 두는 반면에 추정값 s_b^2 은 매일 관측값의 변동에 기초를 두고 있기 때문에, 이들의 차이는, 관측값이 하루하루 변화되지만 임의의 하루동안 행해진 관측에 대해서는 비교적 일정하게 유지될 수 있는 효과의 존재 가능성을 나타낸다. F-test가 이러한 가능성을 시험하기 위해 사용되며, 분산의 일간 성분을 영이라고 가정한다.

H.5.2.3 F분포는 정규 분포된 우연변동의 분산

σ^2 의 독립된 두 개의 추정값 $s_a^2(v_a)$ 및 $s_b^2(v_b)$ 의 비 $F(v_a, v_b) = s_a^2(v_a)/s_b^2(v_b)$ 의 확률분포이다. 파라미터 v_a 및 v_b 는 두 개의 추정값의 각각의 자유도이고 또 $0 \leq F(v_a, v_b) < \infty$ 이다. F 값은 v_a 및 v_b 의 서로 다른 값과 F 분포의 여러 가지 양에 대하여 도표로 주어진다. $F(v_a, v_b)$ 의 값 $> F_{0.95}$ 또는 $F(v_a, v_b)$ 의 값 $> F_{0.975}$ (한계치)는 일반적으로 통계적인 의미에서 $s_a^2(v_a)$ 가 $s_b^2(v_b)$ 보다 더 크다고 해석된다. 만약 두 개의 추정값들이 동일한 분산의 추정값이라고 가정하면 관측된 것만큼 큰 F 값의 확률이 각각 0.05 또는 0.025 이하라고 나타난다($F_{0.99}$ 와 같이 다른 한계치가 선택될 수도 있다).

표 H.9 - $K=5$ 의 독립된 반복관측을 기초로 하여 얻어진 각 일평균 \bar{V}_j , 시험표준편차 $s(V_{jk})$ 를 포함하여 $J=10$ 일에 얻어진 전압표준기의 교정 데이터 요약

양 \ 일 j	1	2	3	4	5
\bar{V}_j / V	10.000 172	10.000 116	10.000 013	10.000 144	10.000 106
$s(V_{jk}) / \mu V$	60	77	111	101	67
양 \ 일 j	6	7	8	9	10
\bar{V}_j / V	10.000 031	10.000 060	10.000 125	10.000 163	10.000 041
$s(V_{jk}) / \mu V$	93	80	73	88	86
$\bar{V} = 10.000097 V \quad s(\bar{V}_j) = 57 \mu V$ $s_a^2 = Ks^2(\bar{V}_j) = 5(57 \mu V)^2 = (128 \mu V)^2 \quad s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85 \mu V)^2$					

H.5.2.4 F -test를 이 수치 예에 적용하면

$$\begin{aligned}
 F(v_a, v_b) &= \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{Ks^2(\bar{V}_j)}{s^2(V_{jk})} \\
 &= \frac{5(57 \mu V)^2}{(85 \mu V)^2} = 2.25
 \end{aligned}
 \tag{H.26}$$

가 얻어진다. 식중의 분자는 $v_a = J - 1 = 9$ 의 자유도를, 분모는 $v_b = JK - 1 = 40$ 의 자유도를 지닌다. $F_{0.95}(9, 40) = 2.12$ 및 $F_{0.975}(9, 40) = 2.45$ 이기 때문에, 일간 효과가 유의도 5% 수준에서는 통계적으로 의미가 있지만 유의도 2.5% 수준에서는 의미가 없다고 판정된다. H.5.2.5 만약 s_a^2 과 s_b^2 의 차이가 통계적으로 중요하지 않기 때문에 일간 효과의 존재가 제거된다면 (이것은 불확도의 과소평가를 초래할 가능성이 있기 때문에 경솔한 결론임), \bar{V} 의 추정분산 $s^2(\bar{V})$ 은 식(H.23b)로부터 계산되어야 한다. 그 관계는 관측자의 분산의 최적 추정값을 얻기 위하여 추정값 s_a^2 과 s_b^2 를 pooling 하는 것(즉 각각의 자유도 v_a 와 v_b 에 의해 각 가중치를 이용하여 s_a^2 과 s_b^2 의 가중평균을 구함-4.2.4 참조)과 같고, 관측값의 평균의 분산의 최적 추정값 $s^2(\bar{V})$ 을 구하기 위해, 그 추정값을 관측값의 수 JK 로 나눈 것과 같다. 이 절차를 따라 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} s^2(\bar{V}) &= \frac{(J-1)s_a^2 + JK-1)s_b^2}{JK(JK-1)} \\ &= \frac{9(128\mu\text{V})^2 + 40(85\mu\text{V})^2}{(10)(5)(49)} \\ &= (13\mu\text{V})^2 \end{aligned} \quad (\text{H.27a})$$

$$\text{또는} \quad s(\bar{V}) = 13\mu\text{V} \quad (\text{H.27b})$$

여기서 $s(\bar{V})$ 의 자유도는 $JK - 1 = 49$ 이다.

만일 계통효과에 대한 모든 보정이 이미 고려되었고 다른 모든 불확도 성분은 무시할 수 있다고 가정하면,

교정결과는 $V_s - \bar{V} = 10.000097\text{V}$ (표 H.9 참조),

합성표준불확도는 $s(\bar{V}) = u_c = 13\mu\text{V}$, u_c 의 자유도는 49라고 표현될 수 있다.

[주]

1. 실제로는 대부분의 경우에 무시할 수 없는 불확도 성분이 더 있을 수 있다. 이러한 경우 이것을 관측값으로부터 통계적으로 구한 불확도 성분과 합성시킬 필요가 있다(H.5.1 참조).

2. 식(H.23b)의 이중합을 S로 나타내어 아래와 같이 다시 써보면 $s^2(\bar{V})$ 에 대한 식(H.27a)은 식(H.23b)와 같다는 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [(V_{jk} - \bar{V}_j) + (\bar{V}_j - \bar{V})]^2 \\ &= (J-1)s_a^2 + JK-1s_b^2 \end{aligned}$$

H.5.2.6 만약 일간 효과의 존재가 받아 들여지고 (이것은 불확도의 과소평가 가능성을 피하기 위한 신중한 결정) 이것이 우연적(to be random)이라고 가정하면, 식(H.24d)에 따라 $J=10$ 개의 일평균으로부터 계산된 분산 $s^2(\bar{V}_j)$ 은 H.5.2.2 항에서 가정한 것처럼 σ_w^2/K 가 아니라 $\sigma_w^2/K + \sigma_B^2$ 로 추정된다. 여기서 σ_B^2 는 분산의 일간 우연성분이다. 이것은 다음 식을 의미한다.

$$s^2(\bar{V}_j) = s_w^2/K + s_B^2 \quad (\text{H.28})$$

여기서 s_w^2 은 σ_w^2 을 s_B^2 은 $9\sigma_B^2$ 을 추정한다. 식(H.25b)으로부터 계산된 $s^2(\bar{V}_{jk})$ 는 관측값의 일내 변동에 의존되기 때문에 $s_w^2 = s^2(\bar{V}_{jk})$ 라고 해도 좋다. 따라서 H.5.2.4 항에서 F-test를 위해 사용되었던 비 $K s^2(\bar{V}_j) / \overline{s^2(V_{jk})}$ 은 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} F &= \frac{K s^2(\bar{V}_j)}{s^2(V_{jk})} = \frac{s_w^2 + K s_B^2}{s_w^2} \\ &= \frac{5(57 \mu\text{V})^2}{(85 \mu\text{V})^2} = 2.25 \end{aligned} \quad (\text{H.29})$$

따라서

$$\begin{aligned} s_B^2 &= \frac{K s^2(\bar{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}}{K} \\ &= (43 \mu\text{V})^2 \quad \text{또는} \quad s_B = 43 \mu\text{V} \end{aligned} \quad (\text{H.30a})$$

$$s_w^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85 \mu\text{V})^2 \quad \text{또는} \quad s_w = 85 \mu\text{V} \quad (\text{H.30b})$$

\bar{V} 의 추정분산은 식(H.25d)의 $s^2(\bar{V}_j)$ 로부터 구해진다. 왜냐하면 $s^2(\bar{V}_j)$ 이 분산의 일내 및 일간 우연변동성분을 반영하고 있기 때문이다[식 (H.28)참조]. 따라서

$$\begin{aligned} s^2(\bar{V}) &= s^2(\bar{V}_j)/J \\ &= (57 \mu\text{V})^2/10, \quad \text{또는} \quad s(\bar{V}) = 18 \mu\text{V} \end{aligned} \quad (\text{H.31})$$

가 구해지며, $s(\bar{V})$ 는 $J-1=9$ 의 자유도를 가진다.

s_W^2 (또는 s_W)의 자유도는 $J(K-1)=40$ 이 된다 [식 (H.25b) 참조]. s_B^2 (또는 s_B)의 자유도는 차 $s_B^2 = s^2(\bar{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}/K$ 의 유효 자유도이지만 그의 추정에는 문제가 많다.

H.5.2.7 그러므로 전압표준기의 전위차의 최적 추정값은 $V_s = \bar{V} = 10.000\,097\text{ V}$ 이고, 식(H.31)에서 주어진 바와 같이 $s(\bar{V}) = u_c = 18\ \mu\text{V}$ 를 가진다. 이 u_c 의 값과 그의 자유도 9는 일간 효과가 제거될 때 H.5.2.5에서 구한 결과[식(H.27b)]인 $u_c = 13\ \mu\text{V}$ 와 그의 자유도 49와 비교된다. 실제 측정에서는 일간 효과의 원인과 분산분석의 이용을 무효화할 것 같은 계통효과 존재여부를 결정하기 위하여, 가능하다면 외견상 일간 효과의 존재에 대해 좀더 조사되어야 한다. 이 예의 초반에 지적한 바와 같이 분산분석의 방법은 우연효과로부터 생기는 불확도 성분을 확인하고 평가하기 위해 설계된다. 이 방법은 계통효과로부터 생기는 성분 에 대한 정보는 제공할 수 없다.

H.5.3 측정에서 분산분석의 역할

H.5.3.1 이 전압표준기의 사례는 일반적으로 균형된 1단 지분배치라고 부르는 것에 대해 설명하고 있다. 1단 지분배치(one-stage nested design)라고 하는 것은 관측이 행하여 지는 날이라고 하는 1개의 인자에 대해 관측값의 지분의 단계가 하나 있기 때문이다. 균형되어 있다고 하는 것은 매일 행하여지는 관측의 수가 같기 때문이다.

본 사례에서 설명된 분석은 어떤 측정에 있어서 “측정자 효과”, “기기 효과”, “시험실 효과”, “표본 효과” 또는 “방법 효과”까지도 그 존재 여부를 결정하는데 사용될 수 있다. 따라서 본 사례에서는 J 일의 다른날 이루어진 관측들을 같은날 J 인의 다른 측정자에 의해 이루어진 관측으로 대체하여 생각할 수도 있다. 이 경우 분석의 일간 성분은 다른 측정자에 수반되는 분산성분으로 바뀌게 된다.

H.5.3.2 H.5에서 기술한 바와 같이 분산분석은 시험기관간 시험을 통해 표

준물질(RMs)을 인증하는데 널리 사용된다. 이러한 인증은 보통 독립적으로 동등한 능력을 가진 여러 시험기관이 인증하고자 하는 물질의 특성에 대하여 그 물질의 시료를 측정하는 것을 필요로 한다. 일반적으로 개별 결과의 차이는 시험기관내 및 시험기관간 양쪽 다 그 원인에 관계없이 통계적 특성을 갖는다고 생각한다. 각 시험기관 평균은 물질특성의 비편향 추정량으로 간주되며, 통상 시험기관 평균의 비가중 평균을 그 특성의 최적추정값으로 간주한다.

하나의 표준물질의 인증에는 서로다른 I 개의 시험기관이 참가하고, 각 시험기관은 해당물질의 서로 다른 J 개의 시료에 대해 필요한 특성을 측정하며, 하나의 시료에 대한 개개의 측정은 서로 독립적인 K 번의 반복측정으로 이루어진다. 따라서 총관측의 회수는 IJK 개가 되며 총 시료의 수는 IJ 개가 된다. 이는 상기의 1단 지분의 전압표준기의 사례와 비슷한 균형된 2단 지분배치의 사례가 된다. 이 사례에서는 측정에 있어 변동이 되는 시료와 시험기관라는 2개의 다른 인자를 가진 2개 단계의 지분이 있다.

이 배치는 각 시료가 각 시험기관에서 같은 회수로(K) 관측되고, 각 시험기관은 같은 수(J)의 시료를 측정하므로 균형이 된다. 전압표준기의 사례와 유사한 표준물질의 경우 자료분석의 목적이 시료간 효과와 시험기관간 효과의 존재가능성 여부와 인증하고자 하는 특성값의 최적 추정값에 대한 적절한 불확도를 결정하는데 있다. 앞절에서와 같이 그 추정값은 I 개 시험기관 평균들의 평균이며, 또한 IJK 개의 관측값들의 평균값도 된다고 생각한다.

H.5.3.3 측정결과의 불확도는 관측자료를 바탕으로 통계적으로 평가될 수 있도록 측정결과가 의존하는 입력량을 변화시키는 것에 대한 중요성은 3.4.2절에서 지적한 바 있다. 지분배치와 분산분석방법에 의한 결과자료의 분석은 실무에서 부딪히는 여러 측정상황에서 성공적으로 사용될 수 있다.

그러나 3.4.1절에서 지적한 바와 같이 모든 입력량을 변화시키는 것은 시간이나 자원의 제약으로 인하여 타당하지 못한 경우가 많다. 따라서 많은 측정상황에서는 분산분석방법을 사용하여 많은 불확도 성분중에서 몇 개의 성분만을 평가할 수 있는데 그치게 된다. 4.3.1절에서 지적한 바와 같이 많은 성분들은 문제가 되는 입력량의 변동가능성에 대한 모든 가능한 정보를 활용하여 과학적인 판단으로 평가하여야 한다. 즉, 많은 사례에서는 시료간 효과, 시험기관간 효과, 측정기기간 효과 또는 측정자간 효과와 같은 효과로부터 기인한 불확도 성분은 일련의 측정값을 통계적으로 분석하여 평가하지 못하고 활용가능한 정보의 풀로부터 평가할 수 밖에 없다.

H.6 기준 스케일에 의한 측정 :

경도는 측정방법을 참조하지 않고는 정량화 할 수 없는 물리적 개념의 한 예이다. 즉 측정방법에 의존하지 않는 독립적인 경도 단위는 없다. “경도”라는 양은 (종종 일부 재료에 대하여 그 경도와 다른 성질과의 관계를 밝히는 시험식에서 쓰일 경우가 있기는 하지만) 다른 측정가능한 양을 정의하는 수학 방정식에 사용될 수 없다는 점에서 전형적인 측정가능한 양들과 다르다. 경도값은 시험 대상 시편에 대한 압입깊이 측정이라는 일반적인 방법에 의해 결정되며 측정은 “압자”에 대한 설명, 압자가 부착된 시험기의 구조, 시험기의 작동방법 등이 기록되어 있는 표준규격에 따라 수행된다. 경도측정에 대한 표준 규격은 두가지 이상이 있으며, 따라서 그 스케일도 두 가지 이상이 있다.

최종 기록되는 경도값은 압입깊이의 함수(스케일에 따라 달라짐)이다. 이 부록에 제시된 예에서는 경도값이 다섯 번의 반복 압입에 의해 얻어진 압입깊이값의 산술평균의 일차함수인 경우를 나타낸 것인데 다른 스케일의 경우 일차함수가 아닌 경우도 있다.

현재 표준시험기는 국가표준으로 유지되고 있으며 국제 표준은 아직 실현된 것이 없다; 특정 시험기와 국가표준시험기 사이의 비교는 경도 전달 기준편을 사용하여 이루어진다.

H.6.1 측정의 문제

이 부록에서 든 예에서는 국가표준기를 바탕으로 교정된 시험기를 사용하여 “로크웰 C” 스케일을 기준으로 시편의 경도를 측정하였다. 로크웰 C 경도 스케일의 단위는 0.002 mm인데 경도는 $100 \times (0.002 \text{ mm})$ 에서 mm 단위로 측정된 5번의 압입 깊이의 평균을 뺀 값으로 정의된다. 이 값을 로크웰 스케일 단위인 0.002 mm로 나눈 값을 “HRC 경도 값”이라고 부른다. 본 예에서는 mm 단위 표시값을 단순히 “경도”라고 부르고 hRockwell C라고 표시하였으며, 이것을 (0.002 mm로 나누어) 로크웰 길이 단위로 나타낸 것을 “경도값”이라고 부르고 HRockwell C라고 표시하였다.

H.6.2 수학적 모델

일반 시험기, 혹은 교정용 시험기를 사용하여 얻어진 압입깊이의 평균값에는 같은 시편에 대하여 국가표준시험기로 압입하였을 때 얻어지는 압입깊이의 평균과 같게 하기 위하여 보정값이 더해져야만 한다.

$$h_{\text{Rockwell C}} = f(\bar{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_S) \\ = 100 (0.002 \text{ mm}) - \bar{d} - \Delta_c - \Delta_b - \Delta_S$$

(H.32a)

$$H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}} / (0.002 \text{ mm}) \quad (\text{H.32b})$$

여기서,

\bar{d} : 시편에 대하여 교정용 시험기를 사용하여 얻은 다섯 번의 압입 깊이의 평균

Δ_c : 경도전달 기준편을 사용하여 교정용 시험기와 국가표준시험기를 비교하여 얻어진 보정값으로 기준편을 대상으로 국가표준시험기를 사용하여 얻어진 5m 번의 압입 깊이의 평균에서 동일한 기준편을 대상으로 교정용 시험기를 사용하여 얻어진 5n 번의 압입깊이 평균을 뺀 값이고,

Δ_b : 경도 전달 기준편에서 위 두 시험기에 의해 각각 사용된 압입위치간의 경도 차이로 (압입깊이 평균의 차이로 표현된다) 영으로 간주되며,

Δ_S : 국가표준시험기의 재현성 부족과 경도 양의 불완전한 정의에서 기인하는 오차이다. Δ_S 값은 영으로 간주되어야만 하나 관련 표준불확도 $u(\Delta_S)$ 를 갖는다.

식 (H.32a)에 대한 편미분 $\partial f/\partial \bar{d}$, $\partial f/\partial \Delta_c$, $\partial f/\partial \Delta_b$, $\partial f/\partial \Delta_S$ 의 값들이 모두 -1이기 때문에 교정용 시험기로 측정된 시편의 경도의 합성표준분산 $u_c^2(h)$ 는 다음과 같이 단순하게 표시할 수 있다.

$$u_c^2(h) = u^2(\bar{d}) + u^2(\Delta_c) + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_S) \quad (\text{H.33})$$

여기서 $h \equiv h_{\text{Rockwell C}}$ 이며 표현을 간략히 하기 위하여 사용한 것이다.

H.6.3 표준 불확도 성분의 평가

H.6.3.1 시편의 압입깊이 평균 \bar{d} 의 불확도, $u(\bar{d})$

반복측정 불확도: 경도측정을 완벽하게 다시 반복하는 것은 불가능한데 그 이유는 한 번 찍은 곳을 다시 찍을 수 없기 때문이다. 압입은 할 때마다 다른 위치에 해야 하므로 측정결과의 변화에는 서로 다른 위치간의 경도 변화에 따른 효과가 포함되어 있다. 따라서 교정용 시험기로 측정한 다섯곳의 압입깊이 평균의 표준불확도 $u(\bar{d})$ 는 $sp(dk)/\sqrt{5}$ 인데 여기에서 $sp(dk)$ 는 매우 균일한 경도 분포를 갖는 것으로 알려진 기준편에 대하여 “반복적으로” 측정하여 얻어진 압입깊이의 합동 시험 표준편차이다(4.2.4. 참고).

지시 불확도: 교정용 시험기의 표시부로 인한 \bar{d} 에 대한 보정값이 영이더라도 \bar{d} 에는 눈금의 분해능 δ 로 인한 깊이 지시 불확실성으로 인한 불확도, $u^2(\delta) = \delta^2/12$ (4.3.1)가 포함되어 있다. 따라서 \bar{d} 의 추정분산은 다음과 같다.

$$u^2(\bar{d}) = s^2(d_k)/5 + \delta^2/12 \quad (\text{H.34})$$

H.6.3.2 두 시험기간의 차이에 대한 보정값의 불확도, $u(\Delta_c)$

H.6.2에 나타낸 바와 같이 Δ_c 는 국가표준시험기와 교정용 시험기간의 차이에 대한 보정값이다. 이 보정은 $\Delta_c = z'_s - z'$ 으로 표현될 수 있으며 여기에서 $z'_s = (\sum_{i=1}^m \bar{z}_{s,i})/m$ 으로 표준전달 기준편을 대상으로 국가 표준 시험기로 얻어진 5m번의 압입 깊이의 평균이다. 그리고 $z' = (\sum_{i=1}^n \bar{z}_i)/n$ 은 같은 기준편을 대상으로 교정용 시험기로 얻어진 5n번의 압입 깊이 평균이다. 따라서 각 시험기의 표시부 분해능으로 인한 불확도가 무시할만하다고 가정하면 Δ_c 의 추정분산은 다음과 같다.

$$u^2(\Delta_c) = \frac{s_{av}^2(\bar{z}_s)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} \quad (\text{H.35})$$

여기서 $s_{av}^2(\bar{z}_s) = [\sum_{i=1}^m s^2(\bar{z}_{s,i})]/m$ 은 표준시험기로 얻어진 m차의 압입 $z_{s,i}$ 의 각 평균의 시험 분산의 평균이며, $s_{av}^2(\bar{z}) = [\sum_{i=1}^n s^2(\bar{z}_i)]/n$ 은 교정용 시험기로 얻어진 n차의 압입 z_i 의 평균의 시험 분산의 평균이다.

[주]

분산 $s_{av}^2(\bar{z}_S)$ 와 $s_{av}^2(\bar{z})$ 는 합동 추정분산이다(H.5.2.2.의 식 H.25b에 대한 논의를 참고).

H.6.3.3 경도전달 기준편의 경도 변화로 인한 보정값의 불확도, $u(\Delta_b)$

OIML의 국제 권고 R 12인 로크웰 C 경도 기준편의 교정과 검증에 보면 경도전달 기준편에 대하여 다섯 번 측정하여 얻어진 압입깊이의 최대값과 최소값의 차이가 압입깊이평균에 대한 일정 분율 x 보다 크지 않아야 한다고 되어 있다. 여기에서 x 는 경도 수준의 함수이다. 기준편 전 범위에 걸친 압입깊이의 최대 차이가 xz' 이라 하자. 여기에서 z' 은 H.6.3.2에 정의된 바와 같으며 $n=5$ 인 경우이다. 또한 최대차이가 평균값 $xz'/2$ 를 중심으로 삼각확율분포로 나타내어진다고 하자(중심값근처의 값들이 양쪽 끝의 값들보다 더 측정될 가능성이 높다는 가정을 기초로 한 것이다. -4.3.9절 참고). 그러면 4.3.9절에서의 식 (9b)에서 $a = xz'/2$ 인 경우, 표준시험기와 교정용 시험기간의 경도값 차이를 조정하기 위한 압입깊이 평균에 대한 보정의 추정분산은 다음과 같다.

$$u^2(\Delta_b) = (xz')^2/24 \quad (\text{H.36})$$

H.6.2에서 언급하였듯이, Δ_b 자체에 대한 보정값의 최적 추정값은 영이라고 가정한다.

H.6.3.4 국가표준시험기와 경도 정의의 불확도, $u(\Delta_s)$

국가표준시험기의 불확도와 경도라는 양의 불완전한 정의로 인한 불확도는 모두 함께 추정표준편차 $u(\Delta_s)$ (길이 단위의 양) 로 보고된다.

H.6.4 합성 표준불확도, $U_c(h)$

H.6.3.1절에서부터 H.6.3.4에 이르기까지 거론된 각 항목들의 자료를 수집하고 그 값들을 (H.33)식에 대입하면 경도측정의 추정분산이 얻어진다.

$$u^2_c(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s^2_{av}(\bar{z}_s)}{m} \tag{H.37}$$
$$+ \frac{s^2_{av}(\bar{z})}{n} + \frac{(\bar{xz})^2}{24} + u^2(\Delta_s)$$

표 H.10 - 시편의 로크웰 C 스케일 경도를 결정하기 위한 데이터 요약.

불확도의 원인	값
교정시험기로 시편을 5번 압입 한 평균 깊이 d : 0.072 mm	36.0 로크웰 스케일 단위
5번 압입하여 얻어진 시편의 경도값: $H_{\text{Rockwell C}}$ $= h_{\text{Rockwell C}} / (0.002 \text{ mm}) = [100 (0.002 \text{ mm})$ $- 0.072 \text{ mm}] / (0.002 \text{ mm})$ (H.6.1을 참고)	64.0 HRC
균일한 경도값을 갖는 시편을 교정시험기로 압입한 깊이의 합동시험표준편차 $s_p(d_k)$	0.45 로크웰 스케일 단위
교정시험기 표시부의 분해능 δ	0.1 로크웰 스케일 단위
경도전달 기준편을 대상으로 국가표준시험기로 얻어진 m 차 의 압입 평균의 시험분산의 평균의 제곱근 $s_{av}(z_S)$	0.10 로크웰 스케일 단위, $m=6$
경도전달 기준편을 대상으로 교정시험기로 얻어진 n 차의 압입 평균의 시험분산의 평균의 제곱근 $s_{av}(z)$	0.11 로크웰 스케일 단위, $n=6$
경도전달 기준편에서의 압입 깊이에 대한 미소 허용변동 x	1.5×10^{-2}
국가표준시험기와 경도 정의의 표준 불확도 $u(\Delta_S)$	0.5 로크웰 스케일 단위

그리고 여기서 $u_c(h)$ 는 합성표준불확도이다.

H.6.5 계산의 예

아래의 예에서 쓰인 값들은 위의 표 H.10에 정리되어 있다.

스케일은 로크웰 C이고 HRC로 표시된다. 로크웰 스케일의 단위는 0.002 mm이며 따라서 표 H.10과 아래의 예에서(예를 들어) “36.0 로크웰 스케일 단위”라고 하면 $36.0 \times (0.002 \text{ mm}) = 0.072 \text{ mm}$ 를 의미하며 이것은 단순히 각 값들과 결과를 편하게 표현하기 위한 것이다.

표 H.10에 표시된 관련양의 값들을 식 (H.37)에 대입하면 다음의 두 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
 u_c^2(h) &= \left[\frac{0.45^2}{5} + \frac{0.1^2}{12} + \frac{0.10^2}{6} + \frac{0.11^2}{6} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(0.015 \times 36.0)^2}{24} + 0.5^2 \right] (\text{로크웰 스케일 단위})^2 \\
 &= 0.307 (\text{로크웰 스케일 단위})^2
 \end{aligned}$$

$$u_c(h) = 0.55 \text{ 로크웰 스케일 단위} = 0.0011 \text{ mm}$$

여기서, 불확도 계산을 위하여 $z' = \bar{d} = 36.0$ 로크웰 스케일 단위로 하였다.

따라서 $\Delta c = 0$ 이라고 가정한다면 시편의 경도는 hRockwell C = 64.0 로크웰 스케일 단위 혹은 0.1280 mm이며 합성표준불확도 $u_c = 0.55$ 로크웰 스케일 단위 혹은 0.0011 mm이다.

시편의 경도값은 hRockwell C / (0.002 mm) = (0.1280 mm) / (0.002 mm), 혹은 HRockwell C = 64.0 HRC 이고 이때 합성표준불확도 $u_c = 0.55$ HRC 이다.

국가표준시험기와 경도 정의에서 기인하는 불확도 성분인 $u(\Delta S) = 0.5$ 로크웰 스케일 단위 외에, 중요한 불확도 성분은 시험기의 반복성으로 인한 불확도 $sp(dk) / \sqrt{5} = 0.20$ 로크웰 스케일 단위와 표준전달 기준편의 경도 불균일로 인한 성분 $(xz')^2 / 24 = 0.11$ 로크웰 스케일 단위이다. u_c 의 유효 자유도는 H.1.6에 나타낸 것처럼 Welch- Satterthwaite공식을 사용하여 계산할 수 있다.

부록 II. 추가 예제

이 부록에는 한국인정기구에서 그동안 수행한 교정 중에서 선택한 예제 및 ISO 지침서 외의 다른 자료에서 선정한 예제를 실었다. 이 부분은 앞으로 여러 측정 분야의 종사자들에게 실질적으로 유용한 참고자료가 되도록 계속 보완해 나갈 예정이다.

예제 목록:

- K.1 1 kg 시험분동의 질량 교정
- K.2 DC 전류측정
- K.3 멀티미터의 20 V range 교정
- K.4 정격 2 V인 열전압 변환기의 교류-직류전압 변환차이 교정
- K.5 산-염기 적정의 불확도 산출

K.1 1 kg 시험분동의 질량 교정

K.1.1 질량 비교 측정의 평형 관계

스텐레스 강으로 만든 1 kg 시험분동 T 와 1 kg 표준분동 S 의 질량을 비교측정하여 시험분동의 질량을 교정할 때 두 분동의 질량차이 Y 를 저울로 측정한다. 저울로 비교측정한 두 분동의 질량차이 Y 는 분동이 공기부력과 지구중력을 받은 상태에서 측정된 값이므로 아래와 같은 질량 평형관계식을 이룬다.

$$\begin{aligned}
 Y = & M_T \left(1 - \frac{\rho}{d_{T20}} - \frac{\rho(t-20) \alpha_T}{d_{T20}} \right) \\
 & - M_S \left(1 - \frac{\rho}{d_{S20}} - \frac{\rho(t-20) \alpha_S}{d_{S20}} \right) \\
 & + 1 \text{ kg} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} (h_T - h_S)
 \end{aligned} \tag{K.1.1}$$

여기서,

M_T : 스텐레스강 1 kg 시험분동 T 의 질량

$M_S = m_S + \Delta_{ads}$: 스텐레스강 1 kg 표준분동 S 의 질량

m_S : 표준분동이 최근 교정되었을 때의 질량값

Δ_{ads} : 표준분동이 최근 교정된 이후 표면오염으로 인한 질량변화량(흔히 경년변화 혹은 질량 불안정도라고도 함).

ρ : 시험분동 T 를 교정할 때의 공기밀도

t : 시험분동 T 를 교정할 때 저울내부(저울 팬)의 온도 $^{\circ}\text{C}$

d_{S20}, V_{S20} : 온도가 20°C 일때 표준분동 S 의 밀도 및 부피

d_{T20}, V_{T20} : 온도가 20°C 일때 시험분동 T 의 밀도 및 부피

α_S : 표준분동 S 의 부피팽창 계수

α_T : 시험분동 T 의 부피팽창 계수

h_S : 표준분동 S 의 질량중심의 높이

h_T : 시험분동 T 의 질량중심의 높이

g : 저울 팬에서 중력가속도

Y : 저울에서 본(읽은) T 와 S 의 질량차이

K.1.2 측정 모델

식 (K.1.1)에서 분동의 밀도에 대응하는 부피를 사용하면 측정량 M_T 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_T &= f(M_S, \rho, V_{T20}, V_{S20}, t, \alpha_S, \alpha_T, Y, \Delta g) \\ &= [M_S + \rho(V_{T20} - V_{S20}) \\ &\quad + \rho(t-20)(V_{T20}\alpha_T - V_{S20}\alpha_S) + Y] \\ &\quad - 1\text{kg} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} (h_T - h_S) \end{aligned} \quad (\text{K.1.2})$$

K.1.3 M_T 의 불확도 성분

식 (K.1.2)로부터 M_T 의 분산을 구하면은 다음과 같다.

표 K.1-1kg 시험분동 T 와 그의 교정에 사용된 1kg 표준분동 S 의 주어진 물리량의 값

동 물 성	분	시 험 분 동 T	표 준 분 동 S	저울의 감도질량
질 량		M_T	$m_S = 999.999\,164\,5\text{ g}$ $u_c = 14\text{ }\mu\text{g}, k=1$ (1998. 5. 1)	100.003 3 mg
모 양		Cylinder	Knob Cylinder	Ring
재 질		스텐레스강	스텐레스강	스텐레스강
밀도(20°C), kg/m ³		7997.472	8049.696 2 ± 0.02 (k=1, v=7)	8000 kg/m ³ (Catalog)
체팽창계수, K ⁻¹		0.000 050 41	0.000 045 ± 0.000 005 (가정)	0.000 045 ± 0.000 005 (가정)
질량중심높이, cm		2.75	3.82 ± 0.1 (계산값)	중력 기울기 영향을 무시함
표면적, cm ²		129.6	151.4	무시함

이 정보자료는 두 분동에 관한 과거 성적서 등을 참고한 것이다. 그리고 본 질량비교에 사용된 저울은 용량이 1kg이고, 저울 내부에 설치되어 있는 100 mg 분동을 저울의 감도분동으로 사용하였다.

$$\begin{aligned}
 u_c^2(M_T) &= \sum C_i^2 u^2(x_i) \\
 &= C_{M_S}^2 u^2(M_S) + C_\rho^2 u^2(\rho) \\
 &\quad + C_{V_{S20}}^2 u^2(V_{S20}) + C_{V_{T20}}^2 u^2(V_{T20}) \\
 &\quad + C_t^2 u^2(t) + C_{a_S}^2 u^2(a_S) + C_{a_T}^2 u^2(a_T) \\
 &\quad + C_{\Delta g}^2 u^2(\Delta g) + C_Y^2 u^2(Y)
 \end{aligned}$$

(K.1.3)

여기서 각 감도계수는 다음과 같다.

$$C_{M_S} = \partial f / \partial M_S = 1$$

$$\begin{aligned}
C_p &= \partial f / \partial \rho \\
&= (V_{T20} - V_{S20}) + (t-20)(V_{T20} a_T - V_{S20} a_S) \\
C_{V_{S20}} &= \partial f / \partial V_{S20} = - [\rho + \rho(t-20)a_S] \\
C_{V_{T20}} &= \partial f / \partial V_{T20} = \rho + \rho(t-20)a_T \\
C_t &= \partial f / \partial t = \rho(V_{T20} a_T - V_{S20} a_S) \\
C_{a_S} &= \partial f / \partial a_S = \rho(t-20)(-V_{S20}) \\
C_{a_T} &= \partial f / \partial a_T = \rho(t-20)(V_{T20}) \\
C_{\Delta g} &= \partial f / \partial \Delta g = 1 \\
C_Y &= \partial f / \partial Y = 1
\end{aligned}$$

K.1.3.1 표준분동의 불확도 $u(M_S)$

표준분동은 성적서에 의하여 교정된 질량값 m_S 이 주어지고, 표준분동이 교정된 이후의 경과시간에 표면오염으로 인한 질량증가량 Δ_{ads} 이 식 (K.1.8)에서 구해진다. 따라서 현재 시험분동을 교정할 때 표준분동의 질량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
M_S &= m_S + \Delta_{ads} = 999.9991645 \text{ g} + 0.57 \text{ }\mu\text{g} \\
&= 999.9991651 \text{ g}
\end{aligned} \tag{K.1.4}$$

이고, 이에 관련된 분산은 다음과 같다.

$$u^2(M_S) = u^2(m_S) + u^2(\Delta_{ads}) \tag{K.1.5}$$

성적서에 주어진 표준분동의 합성표준불확도는

$$u(m_S) = 13.9 \text{ }\mu\text{g} \text{ (} v=55 \text{)} \tag{K.1.6}$$

로 주어지고 있다.

본 교정에 사용된 표준분동은 세척한지 16개월이 지났고 성적서의 질량값은 교정된지 불과 1개월밖에 되지 않는다. 질량변화량 계산에는 원기와 표준분동의 특성이 거의 비슷하다고 가정하여 원기에 적용되는 질량증가공

식에 표면적 비율을 곱하여 계산하였다.

$$\Delta_{ads} = (0.356097 \mu\text{g} \times x^{0.511678}) \times \left(\frac{151.4 \text{ cm}^2}{71.7 \text{ cm}^2} \right) \quad (\text{K.1.7})$$

여기서 x 는 표준분동을 세척한 이후 현재까지 경과한 시간이고 우변 두 번째 괄호항은 표준분동과 원기의 표면적 비율로서 약 2.1이 된다. 식 (K.1.7)로부터 표준분동의 질량증가량 Δ_{ads} 을 계산하였다.

$$\begin{aligned} \Delta_{ads} &= \Delta_{ads}(x=480\text{일}) - \Delta_{ads}(x=450\text{일}) \\ &= 17.608 \mu\text{g} - 17.036 \mu\text{g} \\ &= 0.572 \mu\text{g} \end{aligned} \quad (\text{K.1.8})$$

그러나 국제적으로 스텐레스강 표준분동에 대한 질량변화 보정을 하여도 질량불안정성을 약 $\pm 5 \mu\text{g}$ 범위로 보고 있으므로 이 범위를 불확도의 근거로 가정한다. 이 $\pm 5 \mu\text{g}$ 범위의 질량불안정성의 분포가 균등하다고 가정하고 직사각형분포를 사용하여 Δ_{ads} 의 표준불확도를 구하면 다음과 같다.

$$u(\Delta_{ads}) = \frac{5 \mu\text{g}}{\sqrt{3}} = 2.9 \mu\text{g}, \quad v = \infty \quad (\text{K.1.9})$$

따라서 식 (K.1.5)로부터 표준분동의 불확도를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(M_S) &= \sqrt{u^2(m_S) + u^2(\Delta_{ads})} \\ &= \sqrt{(13.9 \mu\text{g})^2 + (2.9 \mu\text{g})^2} \\ &= 14.2 \mu\text{g} \end{aligned} \quad (\text{K.1.10})$$

$$\begin{aligned} v(M_S) &= \frac{u_c^4(M_S)}{\frac{c_{m_S}^4 u^4(m_S)}{v_{m_S}} + \frac{c_{\Delta_{ads}}^4 u^4(\Delta_{ads})}{v_{\Delta_{ads}}}} \\ &= \frac{(14.2 \mu\text{g})^4}{\frac{1^4 \times (13.9 \mu\text{g})^4}{55} + \frac{1^4 \times (2.9 \mu\text{g})^4}{\infty}} \\ &= 59.90 \end{aligned} \quad (\text{K.1.11})$$

K.1.3.2 부력보정의 불확도 $u(\Delta m_b)$ 1) 공기밀도측정의 불확도 $u(\rho)$

공기밀도측정의 불확도 $u(\rho)$ 는 공식자체가 가지는 불확도 $u(\rho_{eq})$, 측정시스템에 의한 불확도 $u(\rho_{sys})$, 그리고 측정평균값의 불확도 $u(\bar{\rho}_i)$ 를 포함하고 있다.

$$u^2(\rho) = u^2(\rho_{eq}) + u^2(\rho_{sys}) + u^2(\bar{\rho}_i)$$

(K.1.12)

공기밀도의 계산식은 The Equation for Density of Moist Air (BIPM1981/91)가 사용되었으며 공기밀도(kg/m³)는 다음과 같다.

$$\rho = [3.48349 + 1.44458(X_{CO_2} - 0.0004)] \quad (K.1.13)$$

$$\times 10^{-3} \frac{P}{ZT} (1 - 0.3780X_v)$$

여기서 P 는 기압(Pa), T 는 온도(K), Z 는 압축계수, X_{CO_2} 는 CO₂의 몰분율, X_v 는 수증기의 몰분율이다. 이 공식자체는 이미 불확도를 가지고 있으며 그의 표준불확도는 다음과 같다.

$$u(\rho_{eq}) = \rho \times 10^{-4} = 1.2 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^3 \quad (v = \infty) \quad (K.1.14)$$

각 환경측정에 사용된 요소 장비의 표준불확도는

온도 : 5 mK(Quartz Thermometer HP 2804A, 분해능 1 mK)

상대습도 : 1 % RH (Hygrodynamics Inc. 15-3080, 분해능 0.5 % RH)

노점온도 : 0.4 (Dewpoint Meter, Yokogawa 2586, 분해능 0.1)

기압 : 0.02 mbar (Digital Pressure Gage, DPI 140, 분해능 0.01 mbar)

X_{CO_2} : 5×10^{-6} (CO₂ Measuring Device, Horiba PIR 2000, 분해능 10⁻⁶)

로 주어져 있다. 이들을 BIPM 공기밀도 공식 분석에서 이미 제공된 상대정밀도 공식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\Delta\rho/\rho)_P &= +1 \times 10^{-5} (\text{Pa}^{-1}) \Delta P \\ &= +1 \times 10^{-5} (\text{Pa}^{-1}) \times 2 \text{ Pa} = +2 \times 10^{-5} \\ (\Delta\rho/\rho)_T &= -4 \times 10^{-3} (\text{K}^{-1}) \Delta T \\ &= -4 \times 10^{-3} (\text{K}^{-1}) \times 0.005 \text{ K} = -2 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta\rho/\rho)_{td} &= -3\times 10^{-4}(\text{K}^{-1})\Delta_{td} \\
 &= -3\times 10^{-4}(\text{K}^{-1})\times 0.4\text{K} = -1.2\times 10^{-4} \\
 (\Delta\rho/\rho)_{X_{\text{CO}_2}} &= +0.4\times \Delta X_{\text{CO}_2} \\
 &= +0.4\times 0.000005 = +2\times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

(K.1.15)

위의 요소들을 제곱합제곱근을 취하여 공기밀도 측정능력의 상대밀도를 구하면

$$(\Delta\rho/\rho) = 1.23\times 10^{-4}$$

(K.1.16)

이고, 이로부터 측정장비의 공기밀도측정 표준불확도는

$$\begin{aligned}
 u(\rho_{\text{SYS}}) &= u(\Delta\rho) \\
 &= (\Delta\rho/\rho) \times \rho \\
 &= (1.23\times 10^{-4})(0.0012 \text{ g/cm}^3) \\
 &= 1.48\times 10^{-7} \text{ g/cm}^3 \quad (v = \infty)
 \end{aligned}$$

(K.1.17)

이다.

공기밀도측정은 각 질량비교측정이 시작될 때와 끝났을 때에 측정하여 평균값을 사용하였다. 이 공기밀도의 측정평균값, $\bar{\rho}_i$ 는 $\pm 0.0002 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 범위에 존재할 확률이 같다고 보고 직사각형분포를 이룬다고 가정하였다.

$$u(\bar{\rho}_i) = \frac{0.0002 \text{ mg/cm}^3}{\sqrt{3}} = 1.15\times 10^{-4} \text{ mg/cm}^3 \quad (\text{K.1.18})$$

이 경우 불확도값이 약 10%까지 믿을 수 있다면 상대불확도가 $\Delta u(x_j)/u(x_j) = 0.1$ 이므로 자유도는 다음과 같다.

$$v(\bar{\rho}_i) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left[\frac{\Delta u(x_j)}{u(x_j)} \right]^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{0.1^2} = 50 \quad (\text{K.1.19})$$

따라서 공기밀도측정의 종합적인 불확도는 식 (K.1.9)에 의하여 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 u(\rho) &= \sqrt{u^2(\rho_{eq}) + u^2(\rho_{sys}) + u^2(\overline{\rho}_i)} \\
 &= [(1.2 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^3)^2 + (1.48 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^3)^2 \\
 &\quad + (1.15 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^3)^2]^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2.22 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^3
 \end{aligned}
 \tag{K.1.20}$$

이 때의 자유도는

$$\begin{aligned}
 v(\rho) &= u^4(\rho) / \left[\frac{1^4 \times u^4(\rho_{eq})}{\infty} + \frac{1^4 \times u^4(\rho_{sys})}{\infty} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1^4 \times u^4(\overline{\rho}_i)}{50} \right] \\
 &= (2.22 \times 10^{-7})^4 / \left[\frac{1^4 \times (1.2 \times 10^{-7})^4}{\infty} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1^4 \times (1.48 \times 10^{-7})^4}{\infty} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1^4 \times (1.15 \times 10^{-7})^4}{50} \right] \\
 &= 694.4
 \end{aligned}$$

(K.1.21)

2) 분동부피의 불확도 $u(V_{S20})$, $u(V_{T20})$

표준분동과 시험분동의 각 부피는 각각 성적서에 주어진 분동의 밀도로 부터 계산된다. 두 분동 모두 밀도의 표준불확도가 0.00002 g/cm^3 ($k=1, v=7$)이므로 1000 g의 분동의 부피로 보면 0.02 cm^3 에 해당한다.

표준분동의 부피는 $V_{S20} = (999.9991652 \text{ g}) / (8.0496962 \text{ g/cm}^3)$
 $= 124.2282 \text{ cm}^3$ 이고 불확도는 다음과 같다.

$$u(V_{S20}) = 0.02 \text{ cm}^3 = 2 \times 10^{-8} \text{ m}^3, \quad v = 7$$

(K.1.22)

시험분동의 부피는 $V_{T20} = 125.0399 \text{ cm}^3$ 이고 불확도는 다음과 같다.

$$u(V_{T20}) = 0.02 \text{ cm}^3 = 2 \times 10^{-8} \text{ m}^3, \quad v = 7$$

(K.1.23)

3) 부피팽창계수의 불확도 $u(a)$

표준분동과 시험분동의 부피팽창계수는 모두 비자성 스텐레스강이므로 일반적인 물성자료집에 있는 스텐레스강 부피팽창계수값 $\alpha = 4.5 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$ 을 택하여 사용하였으며 이 경우 부피팽창계수의 값이 $\pm 0.000005 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 범위 내에 있을 확률이 균일하다고 가정하여 직사각형분포로 본다. 따라서 부피팽창계수값의 표준불확도는 다음과 같다.

$$u(a) = \frac{0.000005 \text{ K}^{-1}}{\sqrt{3}} = 2.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1} \quad (\text{K.1.24})$$

자유도 계산에서 $u(a)$ 의 값은 10 %까지 믿을 수 있다고 가정하였다.

$$v(a) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left[\frac{\Delta u(x_j)}{u(x_j)} \right]^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{0.1^2} = 50 \quad (\text{K.1.25})$$

4) 온도측정의 불확도 $u(t)$

온도측정값의 불확도는 온도측정장비의 성적서에 주어진 $\sigma = 5 \text{ mK}$ 을 사용한다.

$$u(t) = 5 \text{ mK} \quad (v = \infty) \quad (\text{K.1.26})$$

5) 부력보정의 불확도 $u(\Delta m_b)$

이상의 계산결과를 사용하여 부력보정의 불확도 $u(\Delta m_b)$ 를 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{aligned} u^2(\Delta m_b) &= C_\rho^2 u^2(\rho) + C_{V_{S20}}^2 u^2(V_{S20}) + C_{V_{T20}}^2 u^2(V_{T20}) \\ &\quad + C_{a_S}^2 u^2(a_S) + C_{a_T}^2 u^2(a_T) + C_t^2 u^2(t) \\ &= [V_{T20} - V_{S20} + (t-20)(V_{T20} a_T - V_{S20} a_S)]^2 \\ &\quad u^2(\rho) + (-1)^2 [\rho + \rho(t-20)a_S]^2 \\ &\quad u^2(V_{S20}) + [\rho + \rho(t-20)a_T]^2 u^2(V_{T20}) \\ &\quad + [\rho(t-20)(-V_{S20})]^2 u^2(a_S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [\rho (t-20)(V_{T20})]^2 u^2(a_T) \\
& + [\rho (V_{T20} a_T - V_{S20} a_S)]^2 u^2(t) \\
= & (0.00018 \text{ mg})^2 + (0.00034 \text{ mg})^2 + (0.00034 \text{ mg})^2 \\
& + (0.00022 \text{ mg})^2 + (0.00022 \text{ mg})^2 \\
& + (0.00000 \text{ mg})^2 \\
& = (0.00060 \text{ mg})^2
\end{aligned}$$

(K.1.27)

$$u(\Delta m_b) = 0.6 \text{ } \mu\text{g}$$

(K.1.28)

자유도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
v_{\text{eff}}(\Delta m_b) &= \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}} \\
&= (0.6 \text{ } \mu\text{g})^4 / \left[\frac{(0.18 \text{ } \mu\text{g})^4}{694} + \frac{(0.34 \text{ } \mu\text{g})^4}{7} \right. \\
&\quad + \frac{(0.34 \text{ } \mu\text{g})^4}{7} + \frac{(0.22 \text{ } \mu\text{g})^4}{50} + \frac{(0.22 \text{ } \mu\text{g})^4}{50} \\
&\quad \left. + \frac{(0.00 \text{ } \mu\text{g})^4}{\infty} \right] \\
&= 33.1
\end{aligned}$$

(K.1.29)

K.1.3.3 중력보정의 불확도 $u(\Delta_g)$

중력보정은 시험분동의 질량중심과 표준분동의 질량중심의 높이차이와 이 지점에서 중력기울기로 인하여 생긴 보정값 Δ_g 이며, 편의상 그의 함수를 f_g 라고 놓는다.

$$\Delta_g = f_g = - (1 \text{ kg}) \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} (h_T - h_S)$$

$$= - (1 \text{ kg}) \cdot \frac{1}{g} \cdot g' \cdot \Delta H = -0.0028 \text{ mg} \quad (\text{K.1.30})$$

질량측정실의 중력값은 $g = 979.8320 \text{ cm/s}^2$ ($\sigma = 1 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2$) 이고, 두 분동의 높이차이는 $\Delta_H = h_T - h_S = 2.75 \text{ cm} - 3.82 \text{ cm} = -1.07 \text{ cm}$ 이며 $\pm 0.05 \text{ cm}$ 범위의 변동폭을 가지고 있다. 측정실의 저울위치에서 중력가속도 기울기는

$$g' = (\partial g / \partial h) = -2.6 \times 10^{-6} \text{ (s}^{-2}\text{)} \quad (\text{K.1.31})$$

이며, 이 중력기울기의 추정값은 $\pm 1 \times 10^{-6} / \text{s}^2$ 의 변동폭을 가지며 직사각형분포라고 가정한다.

중력보정의 표준불확도는 중력값의 표준불확도 $u(g)$, 분동 질량중심의 높이차이값의 표준불확도 $u(\Delta_H)$, 그리고 중력구배의 표준불확도 $u(g')$ 를 포함하며 그의 분산식은 다음과 같다.

$$u^2(\Delta_g) = C_g^2 u^2(g) + C_H^2 u^2(\Delta_H) + C_{g'}^2 u^2(g') \quad (\text{K.1.32})$$

여기서 각 감도계수는 다음과 같다.

$$C_g = \partial f_g / \partial g = + 1 \text{ kg} \frac{1}{g^2} g' \Delta_H$$

$$C_H = \partial f_g / \partial \Delta_H = - 1 \text{ kg} \cdot \frac{1}{g} \cdot g'$$

$$C_{g'} = \partial f_g / \partial g' = - 1 \text{ kg} \cdot \frac{1}{g} \cdot (\Delta_H)$$

질량시험실의 중력값은 표준불확도 $u(g) = \sigma = 1 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2$ 가 주어졌으므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_g &= C_g u(g) \\ &= 1 \text{ kg} \frac{1}{g^2} g' \Delta_H u(g) \\ &= (1000 \text{ g}) \frac{1}{(979.8320 \text{ cm/s}^2)^2} \\ &\quad (-2.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}) (-1.07 \text{ cm}) \\ &\quad (1 \times 10^{-3} \text{ cm/s}^2) = 2.9 \times 10^{-9} \text{ mg} \end{aligned}$$

(K.1.33)

분동의 질량중심의 높이 차이값은 변동폭이 ± 0.05 cm 로 주어져 있으므로 변동폭을 직사각형분포로 본다.

$$u(\Delta_H) = \frac{0.05 \text{ cm}}{\sqrt{3}} = 0.029 \text{ cm} \quad (\text{K.1.34})$$

따라서 분동의 질량중심 높이차이에 대한 표준불확도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_H &= -1 \text{ kg} \cdot \frac{1}{g} \cdot g' u(\Delta_H) \\ &= -1000 \text{ g} \frac{1}{(979.8320 \text{ cm/s}^2)} \\ &\quad (-2.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}) \frac{0.05 \text{ cm}}{\sqrt{3}} = 0.000 \ 077 \text{ mg} \end{aligned}$$

(K.1.35)

측정실의 저울위치에서 중력가속도 기울기에 대한 추정값은 $\pm 1 \times 10^{-6} / \text{s}^2$ 의 변동폭을 가지는 직사각형분포라고 가정하면 중력기울기의 불확도는 다음과 같다.

$$u(\Delta_{g'}) = \frac{1 \times 10^{-6} / \text{s}^2}{\sqrt{3}} = 5.8 \times 10^{-7} / \text{s}^2$$

(K.1.36)

이 불확도값은 10 % 까지 믿을 수 있다고 보면,

$$v(\Delta_{g'}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right]^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{0.1^2} = 50$$

(K.1.37)

이다. 중력 기울기로 인한 질량측정불확도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_{g'} &= -1 \text{ kg} \cdot \frac{1}{g} \cdot (\Delta_H) u(\Delta_{g'}) \\ &= -1000 \text{ g} \frac{1}{(979.8320 \text{ cm/s}^2)} (-1.07 \text{ cm}), \\ &\quad (5.8 \times 10^{-7} / \text{s}^2) = 0.000 \ 63 \text{ mg} \end{aligned}$$

(K.1.38)

이상의 결과들과 식 (K.1.32)로부터 중력영향에 대한 질량측정불확도를 구한다.

$$\begin{aligned}
 u^2(\Delta_g) &= C_g^2 u^2(g) + C_H^2 u^2(\Delta_H) + C_{g'}^2 u^2(g') \\
 &= (2.9 \times 10^{-9} \text{ mg})^2 + (0.000077 \text{ mg})^2 \\
 &\quad + (0.00063 \text{ mg})^2 \\
 &= (0.00064 \text{ mg})^2
 \end{aligned}$$

(K.1.39)

$$u(\Delta_g) = 0.00064 \text{ mg}$$

(K.1.40)

이때의 자유도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 v_{eff}(\Delta_g) &= \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}} \\
 &= \frac{(0.64 \text{ } \mu\text{g})^4}{\frac{(0.00 \text{ } \mu\text{g})^4}{\infty} + \frac{(0.077 \text{ } \mu\text{g})^4}{\infty} + \frac{(0.63 \text{ } \mu\text{g})^4}{50}} \\
 &= 53
 \end{aligned}$$

(K.1.41)

K.1.3.4 저울에서 읽은 질량차이측정값의 불확도 $u(Y)$

$u(Y)$ 는 저울의 측정반복성에 의한 불확도 $u(R)$, 감도분동의 불확도 $u(\Delta_{sen})$, 그리고 저울 스케일의 비선형성에 의한 불확도 $u(l_{non})$ 를 포함하고 있다.

$$u^2(Y) = u^2(R) + u^2(\Delta_{sen}) + u^2(\Delta_{non}) \quad (\text{K.1.43})$$

1) 저울의 측정반복성에 의한 불확도 $u(R)$

1 kg 시험분동과 1 kg 표준분동의 질량차이를 이중치환법으로 12회 반복 측정하여 입력량 R 의 입력추정데이터 $r_i(\text{mg})$ 를 얻었다.

질량정밀비교측정의 이중치환법은 다음과 같다.

$$r_i = \frac{\Delta_{sen}}{O_3 - O_2} \times \left[\frac{(O_1 + O_3)}{2} - O_2 \right] \quad (\text{K.1.44})$$

여기서 O_i 는 저울의 i 번째의 읽음값이고 Δ_{sen} 는 감도분동의 질량이다.

측정 데이터는 다음과 같다.

$$r_i: \quad 3.2210 \quad 3.2205 \quad 3.2195 \quad 3.2195 \quad 3.2190 \quad 3.2200 \\ 3.2205 \quad 3.2195 \quad 3.2210 \quad 3.2190 \quad 3.2205 \quad 3.2195$$

r_i 의 평균값은 $n=12$ 이므로

$$\bar{r}_i = \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) / n = 3.21995 \text{ mg}$$

(K.1.45)

이며 표준편차는 $s(r_i) = 0.00072 \text{ mg}$ 이다.

반복측정의 평균값 \bar{r}_i 에 대한 표준편차 $s(\bar{r}_i)$ 를 구하면 측정반복성으로 인한 불확도 $u(R)$ 가 된다.

$$u(R) = s(\bar{r}_i) = \frac{s(r_i)}{\sqrt{n}} = \frac{0.00072 \text{ mg}}{\sqrt{12}} \\ = 0.00021 \text{ mg} \quad (v = 11)$$

(K.1.46)

저울의 스케일교정에 사용된 감도분동은 저울 내부분동으로 설치되어 있고 그의 밀도가 카탈로그에 8.0 g/cm^3 으로 주어 있다. 이 감도분동은 관련된 저울이 사용될 때마다 같이 사용되며 교정성적서에 질량값과 표준불확도의 정보를 가지고 있다.

$$\text{감도분동의 질량 } \Delta_{\text{sen}} = 100 \text{ mg} + 0.0033 \text{ mg}$$

$$\text{합성표준불확도 } u(\Delta_{\text{sen}}) = 0.00108 \text{ mg} \quad (v = 7) \quad (\text{K.1.47})$$

2) 저울 비선형성의 불확도 $u(I_{\text{non}})$

저울의 비선형성은 카탈로그에 $\pm 0.002 \text{ mg}$ 으로 주어 있다. 이 비선형성의 값은 그의 범위에서 직사각형분포를 이룬다고 가정하며 이때 표준불확도 $u(I_{\text{non}})$ 는 다음과 같다.

$$u(\Delta_{\text{non}}) = \frac{0.002 \text{ mg}}{\sqrt{3}} = 0.0012 \text{ mg} \quad (\text{K.1.48})$$

이 경우 불확도값이 약 10 % 까지 믿을 수 있다면 상대불확도가 $\Delta u(\Delta_{\text{non}}) / u(\Delta_{\text{non}}) = 0.1$ 이므로 자유도는 다음과 같다.

$$v = \frac{1}{2} \frac{1}{\left[\frac{\Delta u(\Delta_{non})}{u(\Delta_{non})} \right]^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{0.1^2} = 50$$

(K.1.49)

3) 저울의 질량차이 측정의 불확도 $u(Y)$

이상의 결과들로부터 식 (K.1.43)의 질량차이 측정값 Y 의 표준불확도 $u(Y)$ 를 구한다. 단 여기서 $C_i = 1$ 이다.

$$\begin{aligned} u(Y) &= \sqrt{u^2(R) + u^2(\Delta_{sen}) + u^2(I_{non})} \\ &= \sqrt{(0.00021 \text{ mg})^2 + (0.00108 \text{ mg})^2 + (0.0012 \text{ mg})^2} \\ &= 0.00163 \text{ mg} \end{aligned}$$

(K.1.50)

$$\begin{aligned} v_{eff} &= \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}} \\ &= \frac{u_c^4(y)}{\frac{1^4 \times 0.00021^4}{11} + \frac{1^4 \times 0.00108^4}{7} + \frac{1^4 \times 0.0012^4}{50}} \\ &= 29.9 \end{aligned}$$

(K.1.51)

K.1.4 M_T 의 합성표준불확도 $u_c(M_T)$

M_T 의 합성표준불확도 $u_c(M_T)$ 는 표 K.2와 같으며 그 계산은 다음과 같다. M_T 의 분산이

$$\begin{aligned} u_c^2(M_T) &= C_{M_S}^2 u^2(M_S) + C_{\Delta m_b}^2 u^2(\Delta m_b) \\ &\quad + C_{\Delta g'}^2 u^2(\Delta g') + C_Y^2 u^2(Y) \\ &= (0.0142 \text{ mg})^2 + (0.0006 \text{ mg})^2 \\ &\quad + (0.00064 \text{ mg})^2 + (0.0016 \text{ mg})^2 \\ &= (0.0143 \text{ mg})^2 \end{aligned} \tag{K.1.52}$$

이므로 불확도는 다음과 같다.

$$u_c(M_T) = 14.3 \mu\text{g} \quad (\text{K.1.53})$$

K.1.5 M_T 의 확장불확도 U

$u_c(M_T)$ 의 유효자유도 $v_{\text{eff}}(M_T)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & v_{\text{eff}}(M_T) \\ &= u_c^4(M_T) / \left[\frac{c_{M_S}^4 u^4(M_S)}{v(M_S)} + \frac{c_{\Delta m_b}^4 u^4(\Delta m_b)}{v(\Delta m_b)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{c_{\Delta m_g}^4 u^4(\Delta m_g)}{v(\Delta m_g)} + \frac{c_Y^4 u^4(Y)}{v(Y)} \right] \\ &= (14.3 \mu\text{g})^4 / \left[\frac{(14.2 \mu\text{g})^4}{59.9} + \frac{(0.6 \mu\text{g})^4}{33.1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(0.64 \mu\text{g})^4}{53.3} + \frac{(1.63 \mu\text{g})^4}{29.9} \right] \\ &= \quad \quad \quad 6 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad . \quad \quad \quad 6 \end{aligned}$$

(K.1.54)

t 분포로부터 신뢰수준 95.45 %이고 자유도 61에 해당하는 값을 찾으면 $t_{95.45, v=61} = 2.04$ 이며, 다음과 같이 확장불확도를 얻는다.

$$\begin{aligned} U_{95.45} &= (t_{95.45, v=61}) u_c(M_T) \\ &= 2.04 \times 14.3 \mu\text{g} = 29.2 \mu\text{g} \end{aligned} \quad (\text{K.1.55})$$

표 K.2 - M_T 측정결과의 표준불확도성분의 요약

표준불확도 성분 $u(x_i)$	불확도 성분요소	표준불확도 $u(x_i)$	$C_i = \frac{\partial f}{\partial x}$	$C_i u(x_i)$	자유도 ν
$u(M_s)$	1 kg 표준분동 S	14.2 μg	1	14.2 μg	59.9
$u(m_s)$	표준분동 S 의 최근 교정 질량값	13.9 μg	1	13.9 μg	55
$u(\Delta_{ads})$	표준분동 S 의 최근 교정 이래로 질량변화량	2.9 μg	1	2.9 μg	∞
$u(\Delta m_b)$	부력보정		1	0.6 μg	33.1
$u(\rho)$	공기밀도	$3.1 \times 10^{-10} \text{ kg/m}^3$	C_ρ	0.18 μg	694
$u(V_{S20})$	표준분동 S 의 부피	$2.76 \times 10^{-10} \text{ m}^3$	C_{VS20}	0.34 μg	7
$u(V_{T20})$	시험분동 T 의 부피		C_{VT20}	0.34 μg	7
$u(t)$	온도	0.017 K	C_t	0.09 μg	∞
$u(a_s)$	표준분동 S 의 부피팽창계수	$2.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	C_{aS}	0.22 μg	50
$u(a_T)$	시험분동 T 의 부피팽창계수	$2.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	C_{aT}	0.22 μg	50
$u(\Delta g)$	중력영향보정	0.64 μg	1	0.64 μg	53.3
$u(Y)$	두 분동의 질량차이에 대한 저울지시값	1.6 μg	1	1.6 μg	29.9
$u(R)$	질량측정의 반복성	0.21 μg	1	0.21 μg	11
$u(\Delta_{sen})$	감도분동	1.08 μg	1	1.08 μg	7
$u(I_{non})$	저울스케일의 비선형성	1.2 μg	1	1.2 μg	50
$u(M_T)$	시험분동 T 의 질량값			$u_c(M) = 14.3 \mu\text{g}$	61.6

K.1.6 교정결과 보고

1 kg 시험분동의 질량 M_T 을 교정한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_T &= [M_S + \rho(V_{T20} - V_{S20}) \\ &\quad + \rho(t-20)(V_{T20} a_T - V_{S20} a_S) + Y] \\ &\quad - 1\text{kg} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} (h_T - h_S) \\ &= [1000.0033608 \text{ g}] - 0.0028 \text{ mg} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } M_T = 1000.003358 \text{ g} \pm 0.029 \text{ mg} \quad (\text{K.1.56})$$

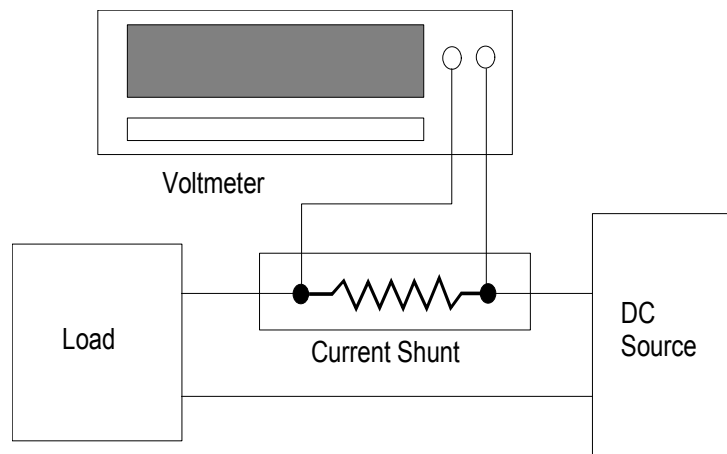
이며, \pm 기호의 숫자는 확장불확도 $U = k u_c$ 이다.

여기서 k 는 자유도 $\nu = 61$ 이고 신뢰수준 95.45 % 일 때의 포함인자 $k = 2.04$ 이며, 합성표준불확도는 $u_c = 0.0143 \text{ mg}$ 이다.

K.2 DC 전류측정

K.2.1 DC 전류측정

전류분류기(current shunt)와 전압계를 이용하여 직류전원에서 공급되는 명목치 10 A의 전류를 측정하기 위하여 그림과 같이 구성하였다. 실내온도는 유리온도계를 이용하여 측정하였다.



K.2.1.1 전류분류기의 교정성적서에 표시된 결과

- ① 전류 명목값 : 10 A
- ② 전류분류기의 저항값 : 0.01 Ω
- ③ 최근 교정된 성적서에 표시된 결과 :
 - 전기저항 $R = 0.010088 \Omega$ (10 A, 23 °C에서)
 - 확장불확도 : 0.08 %, 포함인자 $k=2$
 - 15~30 °C에서의 온도계수 : $6 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
 - 저항값의 drift에 의한 불확도는 무시가능함.

K.2.1.2 전압계의 규격명세

- ① 온도 15~40 °C, 상대습도 80 % 이하에서 동작될 때, 교정후 1년간 교정 불확도가 적용된다고 가정한다.
- ② 직류전압측정 기능의 규격명세

측정범위	온도 눈금	불확도 \pm (% of reading + number of counts)	
		%	number of counts
200 mV	199.99 mV	0.030	2

K.2.1.3 측정값

측정조건 : 온도 - $(23 \pm 5) \text{ }^\circ\text{C}$, 습도 - $(55 \pm 10) \%$

측정횟수	측정전압 (mV)
1	100.68
2	100.83
3	100.79
4	100.64
5	100.63
6	100.94
7	100.60
8	100.68
9	100.76
10	100.65

K.2.2 측정의 수학적 모델

$$I = f(X_1, X_2) = f(V, R) = \frac{V}{R}$$

이 식에서 I 는 측정하고자 하는 전류, V 는 측정되는 전압, R 은 분류기의 저항으로서 $R = R_{23}(1 + \alpha \Delta t)$ 에 의해서 주어진다. 여기서 α 는 분류기의 온도계수이며 Δt 는 $20\text{ }^\circ\text{C}$ 와의 온도차를 의미한다.

K.2.3 불확도 산출 수식

입력량들 간의 상관관계가 없으므로 식(5.1)에 의해

$$u_c^2(I) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

따라서

$$u_c^2(I) = \left(\frac{\partial I}{\partial V} \right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial I}{\partial R} \right)^2 u^2(R)$$

이고, 이 식에서 $u^2(V) = u^2(\bar{V}) + u^2(V_1)$

$$u^2(R) = u^2(R_1) + u^2(R_2)$$

를 의미한다.

여기서

$u(\bar{V})$: 측정전압의 반복관측으로부터 산출되는 A형 표준불확도

$u(V_1)$: 전압계 자체의 불확도에 의한 전압의 표준 불확도

$u(R_1)$: 전류분류기의 교정성적서로부터 얻어진 표준불확도

$u(R_2)$: 주변 온도의 변화에 의한 분류기 저항의 표준불확도

이다.

또한 감도계수는 다음과 같다.

$$c_1 \equiv \frac{\partial I}{\partial V} = \frac{1}{R} = 99.128 \text{ } \Omega^{-1}$$

$$c_2 \equiv \frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{V}{R^2} = -989.70 \text{ } \text{V} \Omega^{-2}$$

K.2.4 불확도 성분의 분석

K.2.4.1 전압에 대한 불확도 평가

1) 반복관측으로부터 얻어진 표준불확도 $u(\bar{V})$: A형평가

평균값: $\bar{V} = 100.72 \text{ mV}$

$$\begin{aligned} \text{시험표준편차: } s(V_i) &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2} \\ &= 10.75 \times 10^{-2} \text{ mV} \end{aligned}$$

평균의 시험표준편차:

$$s(\bar{V}) = \frac{s(V_i)}{\sqrt{n}} = 3.40 \times 10^{-2} \text{ mV}$$

반복관측에 의한 전압의 표준불확도:

$$u(\bar{V}) = s(\bar{V}) = 3.40 \times 10^{-2} \text{ mV}$$

자유도: $\nu_1 = n - 1 = 9$

2) 전압계의 표준불확도 $u(V_1)$

전압계의 규격명세로부터

$$\begin{aligned} a &= (0.030 \% \text{ of reading} + 2 \text{ counts}) \\ &= (0.030 \% \times 100.72 \text{ mV} + 0.02 \text{ mV}) \\ &= 5.02 \times 10^{-2} \text{ mV} \end{aligned}$$

직각분포로 취급가능하므로 표준불확도는

$$u(V_1) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 2.90 \times 10^{-2} \text{ mV}$$

자유도: $\nu_2 = \infty$

3) 전압에 대한 불확도

$$\begin{aligned} u(V) &= \sqrt{u^2(\bar{V}) + u^2(V_1)} \\ &= \sqrt{(3.40 \times 10^{-5})^2 + (2.90 \times 10^{-5})^2} \\ &= 4.47 \times 10^{-5} \text{ V} \end{aligned}$$

전압에 대한 유효자유도를 식(6.2)에 의해 구하면

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{u^4(V)}{\frac{u^4(\bar{V})}{v_1} + \frac{u^4(V_1)}{v_2}} \\
 &= \frac{(4.47 \times 10^{-5})^4}{\frac{(3.40 \times 10^{-5})^4}{9} + \frac{(2.90 \times 10^{-5})^4}{\infty}} \\
 &= 26.89
 \end{aligned}$$

K.2.4.2 분류기의 저항에 대한 불확도 평가

1) 전류분류기 저항의 표준불확도 $u(R_1)$

교정성적서로부터

$$\begin{aligned}
 a &= 8 \times 10^{-4} \times R = 8 \times 10^{-4} \times 0.010088 \\
 &= 8.07 \times 10^{-6} \Omega
 \end{aligned}$$

$k=2$ 로 취급되었으므로, 표준불확도는

$$u(R_1) = \frac{8.07 \times 10^{-6}}{2} = 4.04 \times 10^{-6} \Omega$$

자유도: $v_3 = \infty$

2) 주변 온도의 변화에 의한 분류기 저항의 표준불확도. $u(R_2)$

전압 측정시의 온도: $23 \pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$

$R = R_{23}(1 + \alpha \Delta t)$ 의 관계식에 의해서

$$\begin{aligned}
 a &= 60 \times 10^{-6} \times \Delta t \times R \\
 &= 60 \times 10^{-6} \times 5 \times 0.010088 \\
 &= 3.03 \times 10^{-6} \Omega
 \end{aligned}$$

$$\text{표준불확도: } u(R_2) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 1.75 \times 10^{-6} \Omega$$

자유도: $v_4 = \infty$

3) 저항에 대한 불확도

$$\begin{aligned}
 u(R) &= \sqrt{u^2(R_1) + u^2(R_2)} \\
 &= \sqrt{(4.04 \times 10^{-6})^2 + (1.75 \times 10^{-6})^2} \\
 &= 4.40 \times 10^{-6} \Omega
 \end{aligned}$$

저항에 대한 유효자유도를 식(6.2)에 의해 구하면

$$\begin{aligned}
 \omega_2 &= \frac{u^4(R)}{\frac{u^4(R_1)}{v_3} + \frac{u^4(R_2)}{v_4}} \\
 &= \frac{(4.40 \times 10^{-6})^4}{\frac{(4.04 \times 10^{-6})^4}{\infty} + \frac{(1.75 \times 10^{-6})^4}{\infty}} \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

K.2.5 Current 계산

$$I = \frac{V}{R} = \frac{100.72 \times 10^{-3}}{0.010088} = 9.984 \text{ A}$$

K.2.6 합성표준불확도 $u_c(y)$

$$\begin{aligned}
 u_c(I) &= \sqrt{c_1^2 u^2(V) + c_2^2 u^2(R)} \\
 &= [(99.128^2 \times (4.47 \times 10^{-5})^2 \\
 &\quad + ((-989.70)^2 \times (4.40 \times 10^{-6})^2)]^{\frac{1}{2}} \\
 &= 6.2 \times 10^{-3} \text{ A}
 \end{aligned}$$

K.2.7 유효자유도(Effective degree of freedom)

$$\begin{aligned}
 v_{\text{eff}} &= \frac{u_c^4(I)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{\omega_i}} \\
 &= (6.2 \times 10^{-3})^4 / \left[\frac{99.128^4 \times (4.47 \times 10^{-5})^4}{26.89} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(-989.70)^4 \times (4.40 \times 10^{-6})^4}{\infty} \right] \\
 &\approx 103
 \end{aligned}$$

K.2.8 확장불확도

유효자유도가 103이므로 student $t_p(v)$ 표의 유효자유도 ∞ 로 취급이 가능하다. 유효자유도 $v_{\text{eff}} = \infty$, 신뢰수준 95%에 대한 포함인자를 t -분포표에서 찾으면 $k = 1.96$ 이다.

$$\text{따라서 } U = k u_c(I) = 1.96 \times 6.2 \times 10^{-3} = 0.012 \text{ A}$$

K.2.9 불확도 총괄표

불확도 요소	종 류	표준 불확도	감도계수	확률분포	적용인자	자유도
반복측정	A형	$3.40 \times 10^{-5} \text{ V}$	99.128	t	1	9
전압계	B형	$2.90 \times 10^{-5} \text{ V}$	99.128	직사각형	$1/\sqrt{3}$	∞
분류기저항	B형	$4.04 \times 10^{-6} \Omega$	-989.7	정규	1/2	∞
온도효과	B형	$1.75 \times 10^{-6} \Omega$	-989.7	직사각형	$1/\sqrt{3}$	∞
전류	합성표준 불확도	$6.2 \times 10^{-3} \text{ A}$	-	t	-	103
전류	확장 불확도	0.012 A	-	t	1.96	103

K.2.10 측정결과 보고

다음 네가지 방법중 한가지로 표현한다.

(1) $I = 9.984 \text{ A}$, 확장불확도 $U = 12 \text{ mA}$,

$$k = 1.96, v_{\text{eff}} = 103$$

(2) $I = 9.984(12) \text{ A}$, $k = 1.96$, $v_{\text{eff}} = 103$

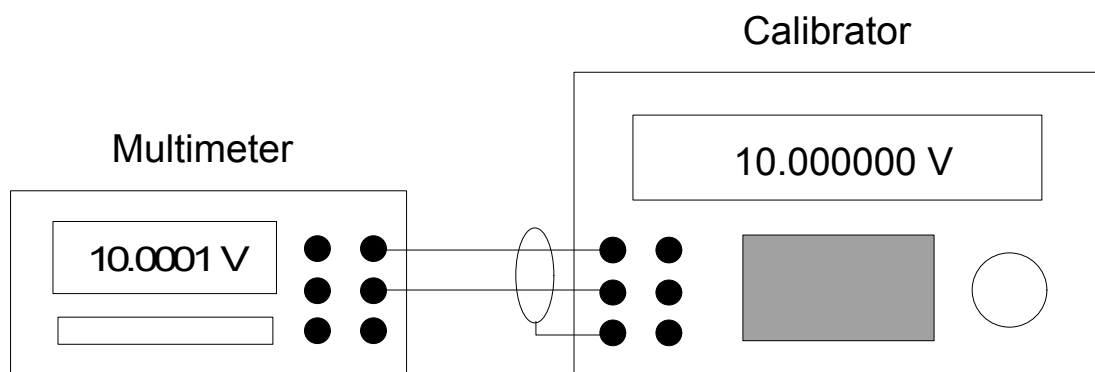
(3) $I = 9.984(0.012) \text{ A}$, $k = 1.96$, $v_{\text{eff}} = 103$

(4) $I = (9.984 \pm 0.012) \text{ A}$, $k = 1.96$, $v_{\text{eff}} = 103$

K.3 멀티미터의 20 V range 교정

K.3.1 멀티미터의 20 V range 교정

멀티미터의 교정절차에 따라, 멀티미터의 20 V range의 정확도를 확인하기 위하여 그림과 같이 다기능 calibrator를 이용하여 직류 10 V를 멀티미터에 인가하였다. 다기능 Calibrator 및 멀티미터의 규격명세는 다음과 같다.



K.3.1.1 다기능 Calibrator의 규격명세

Calibrator의 교정주기는 90일이고, $(23 \pm 1) ^\circ\text{C}$ 에서 교정받았으며 아래의

규격명세 내에 만족됨이 확인되었다.

DC Voltage Specifications

Range	Resolution	Uncertainty at 99 % level of confidence $\pm 5^{\circ}\text{C}$ from calibration temperature		
		24 hours	90 days	1 year
		$\pm(10^{-6} \text{ output} + \mu\text{V})$		
20 V	1 μV	(4 + 3)*	(5 + 4)	(8 + 5)

* $\pm(4 \times 10^{-6} \times \text{output} + 3 \mu\text{V})$ 를 의미한다.

K.3.1.2 멀티미터의 규격명세

DC Voltage Range

Range	Full Scale Display	Resolution	1 year uncertainty $\pm(\% \text{ of reading} + \% \text{ of range})$
20 V	19.9999 V	100 μV	0.0035 + 0.0025

Service manual에 의해, 멀티미터의 20 V range를 확인하기 위해 DC 10 V를 사용하여 다음과 같은 조건에 들어오는지를 측정하였다.

확인 규격명세

Range	Input Voltage	Limits
20 V	10 V	$\pm 0.0007 \text{ V}$

K.3.1.3 측정결과

온도 $23 \pm 2^{\circ}\text{C}$ 에서 멀티미터가 표시하는 전압이 측정시간 동안에 전혀 변하지 않았기 때문에 단 한번의 측정값을 얻었다. 단, 부하효과 및 연결방법에 의한 영향은 무시가능하다.

인가전압	표시전압
10.000 000 V	10.000 1 V

K.3.2 측정의 수학적 모델

$$V_{\text{DMM}} = f(V) = V_{\text{STD}} + \Delta V_{\text{DMM}}$$

여기서

V_{DMM} : 멀티미터가 표시하는 전압

V_{STD} : Calibrator로부터 인가되는 전압

ΔV_{DMM} : 멀티미터 지시값의 오차

K.3.3 불확도 산출 수식

입력량들 간의 상관관계가 없으므로 식(5.1)에 의해

$$u_c^2(V) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial V_i} \right)^2 u^2(V_i)$$

Calibrator의 출력전압이 직접 멀티미터에 인가되었고, 부하효과 및 연결 방법에 의한 영향이 무시되므로 다음 두 가지의 불확도 요인만을 취급한다. 따라서 합성표준불확도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_c(V) &= \left[\left(\frac{\partial V_{\text{DMM}}}{\partial V_{\text{STD}}} \right)^2 u^2(V_{\text{STD}}) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial V_{\text{DMM}}}{\partial \Delta V_{\text{DMM}}} \right)^2 u^2(\Delta V_{\text{DMM}}) \right]^{1/2} \\ &= [c_1^2 u^2(V_{\text{STD}}) + c_2^2 u^2(\Delta V_{\text{DMM}})]^{1/2} \end{aligned}$$

여기서

$u(V_{\text{STD}})$: calibrator의 인가전압에 대한 표준불확도

$u(V_{\text{DMM}})$: 멀티미터의 우연효과로 인한 표준불확도

감도계수는 다음과 같다.

$$c_1 \equiv \frac{\partial V_{\text{DMM}}}{\partial V_{\text{STD}}} = 1$$

$$c_2 \equiv \frac{\partial V_{\text{DMM}}}{\partial \Delta V_{\text{DMM}}} = 1$$

K.3.4 불확도의 성분분석

K.3.4.1 Calibrator의 불확도 평가

Calibrator의 규격명세로부터 교정주기 90일에 해당되는 인가전압의 불확도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \text{ ppm of output} + 4 \mu\text{V} \\ &= 5 \times 10^{-6} \times 10 \text{ V} + 4 \times 10^{-6} \text{ V} \\ &= 54 \times 10^{-6} \text{ V} \end{aligned}$$

규격명세에서 신뢰수준이 99 %로 주어졌고, 정규분포로 가정하면 확장자 $k = 2.58$ 이 된다. 따라서 인가전압의 표준불확도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(V_{\text{STD}}) &= \frac{a}{2.58} = \frac{54 \times 10^{-6}}{2.58} \\ &= 20.9 \times 10^{-6} \text{ V} \end{aligned}$$

$$\text{자유도 } \nu_1 = \infty$$

K.3.4.2 멀티미터의 불확도 평가

Reference standard의 정확도가 피측정기기보다 훨씬 좋은 경우, 멀티미터의 표시값이 전혀 변화되지 않거나 또는 멀티미터의 표시가 가끔 ± 1 count 가 깜빡거릴 뿐이므로 A형 표준불확도는 무시할 수 있다. 따라서 반복성에 대한 불확도는 멀티미터의 분해능을 이용하여 B형 표준불확도로서 취급한다.

즉 규격명세로부터, 20 V range의 분해능은 1 count (즉 100 μV)이다. 지시값이 변화되지 않기 때문에 limits가 $\frac{1}{2}$ count라고 생각할 수 있다.

$$a_2 = \frac{100 \mu\text{V}}{2} = 50 \times 10^{-6} \text{ V}$$

직사각형 분포로 가정하면, 멀티미터의 분해능에 대한 표준불확도는 아래

와 같다.

$$u(\Delta V_{\text{DMM}}) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{50 \times 10^{-6}}{\sqrt{3}} = 28.9 \times 10^{-6} \text{ V}$$

$$\text{자유도 } \nu_2 = \infty$$

K.3.5 합성표준불확도 $u_c(y)$

$$\begin{aligned} u_c(V) &= [c_1^2 u^2(V_{\text{STD}}) + c_2^2 u^2(\Delta V_{\text{DMM}})]^{1/2} \\ &= \sqrt{(20.9 \times 10^{-6})^2 + (28.9 \times 10^{-6})^2} \\ &= 35.7 \times 10^{-6} \text{ V} \end{aligned}$$

K.3.6 유효자유도(effective degree of freedom)

$$\begin{aligned} \nu_{\text{eff}} &= \frac{u_c^4(V)}{\frac{[c_1 u(V_{\text{STD}})]^4}{\nu_1} + \frac{[c_2 u(\Delta V_{\text{DMM}})]^4}{\nu_2}} \\ &= \frac{(35.7 \times 10^{-6})^4}{\frac{(1 \times 20.9 \times 10^{-6})^4}{\infty} + \frac{(1 \times 28.9 \times 10^{-6})^4}{\infty}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

K.3.7 확장불확도

유효자유도 $\nu_{\text{eff}} = \infty$, 신뢰수준 95%에 대한 포함인자를 t-분포표에서 찾으면 $k = 1.96$ 이다. 따라서 확장 불확도는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} U &= k u_c(V) = 1.96 \times 35.7 \times 10^{-6} \\ &= 70 \mu\text{V} \end{aligned}$$

K.3.8 불확도 총괄표

불확도 요인	종류	표준 불확도 (μV)	감도계수	확률 분포	적용인자	자유도
Calibrator	B형	20.9	1	정규	1/2.58	∞
분해능	B형	28.9	1	직사각형	$1/\sqrt{3}$	∞
Multimeter	합성표준 불확도	35.7	-	t	-	∞
Multimeter	확장 불확도	70.0	-	t	1.96	∞

K.3.9 측정결과 보고

다음 네가지 방법중 한가지로 표현한다.

- ① $V = 10.0001 \text{ V}$, 확장불확도 $U = 70 \mu\text{V}$, $k = 1.96$ (신뢰수준 95 %)
- ② $V = 10.0001(7) \text{ V}$, $k = 1.96$ (신뢰수준 95 %)
- ③ $V = 10.0001(0.00007) \text{ V}$, $k = 1.96$ (신뢰수준 95 %)
- ④ $V = 10.0001 \text{ V} \pm 70 \mu\text{V}$, $k = 1.96$ (신뢰수준 95 %)

K.4 정격 2V인 열전압 변환기의 교류-직류 전압 변환차이 교정

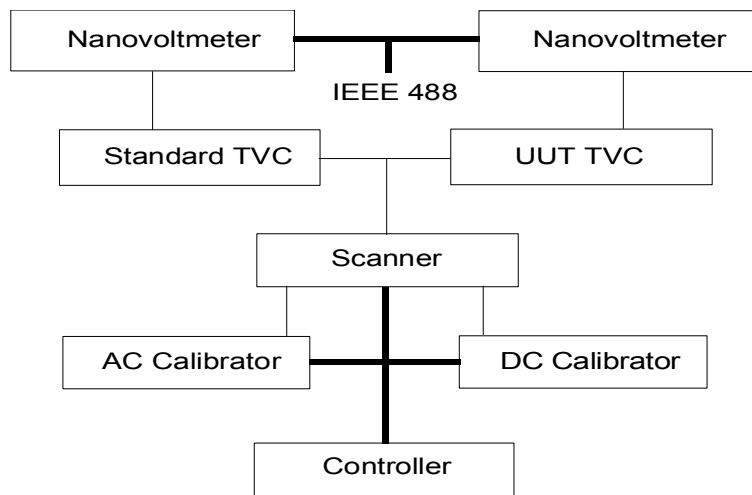
K.4.1 정격 2V인 열전압 변환기의 교류-직류 전압 변환차이 교정

교류전압의 표준은 교류-직류전압 변환차이(교직차)를 알고 있는 열전형 전압변환기(TVC)를 이용하여 직류전압표준에 의하여 측정된다. 교직차의 비교측정은 2개의 TVC를 병렬연결한 후 동일한 전압을 인가하여 이루어진다. 피측정기의 교직차(δ_t)는 다음 식에 의해 주어진다.

$$\delta_t - \delta_s = \frac{E_{sa} - E_{sd}}{n_s E_{sd}} - \frac{E_{ta} - E_{td}}{n_t E_{td}}$$

$$= \Delta\delta$$

여기서 δ_s 는 표준 TVC의 알고 있는 교직차, E_{sa} (E_{sd}) 및 E_{ta} (E_{td})는 상호연결된 표준 TVC 및 피측정 TVC에 교류전압 (또는 \bigcirc 및 \bigcirc 직류 전압)을 인가할 때의 두 TVC의 평균출력전압을 의미하며, n_s (n_t)는 각 TVC의 입력 및 출력에 관련된 특성변수이다. 아래 그림은 자동 교정장치를 간략하게 나타낸 것이다.



Controller는 IEEE-488 Interface 기능을 지닌 컴퓨터를 의미한다. AC Calibrator 및 DC Calibrator로부터의 안정된 전압을 스캐너를 통하여 두 TVC에 공급한다. 스캐너내의 Switching Card는 낮은 열기전력 및 동작시간 상태에서 선택된다. 두 대의 nanovoltmeter는 각각의 TVC의 출력 emf를 직접측정하여 그 측정값을 controller로 보낸다. TVC에 공급되는 전원은 컴퓨터 프로그램에 의해 자동적으로 ac, +dc, -dc, ac 전압을 50 초 간격으로 공급되도록 하였다. 특성 파라미터 n_s (n_t)는 측정을 시작할 때 측정되거나 유도되며, 측정과정은 교직차를 12회 측정하여 평균을 구하도록 하였다.

K.4.1.1 측정결과

주파수 1 kHz에서 2 V-TVC (UUT)를 표준 TVC와 비교측정한 교직차 ($\Delta\delta$)

는 다음과 같았다.

$$\begin{aligned} \Delta\delta (1) &= +4.39 \times 10^{-6} & \Delta\delta (2) &= +2.73 \times 10^{-6} \\ \Delta\delta (3) &= +1.94 \times 10^{-6} & \Delta\delta (4) &= +1.32 \times 10^{-6} \\ \Delta\delta (5) &= +2.32 \times 10^{-6} & \Delta\delta (6) &= +4.09 \times 10^{-6} \\ \Delta\delta (7) &= +5.86 \times 10^{-6} & \Delta\delta (8) &= +2.35 \times 10^{-6} \\ \Delta\delta (9) &= +4.25 \times 10^{-6} & \Delta\delta (10) &= +1.75 \times 10^{-6} \\ \Delta\delta (11) &= +3.93 \times 10^{-6} & \Delta\delta (12) &= +1.55 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

K.4.2 불확도 평가

K.4.2.1 측정의 수학적 모델

$$\delta_t = f(\delta) = \delta_s + \Delta\delta$$

여기서

δ_s : 표준 TVC의 교직차

$\Delta\delta$: UUT와 표준 TVC간의 교직차 차이 측정값

입력변수들이 상호 상관관계가 없기 때문에 합성표준불확도는 식(5.1)에 의해 다음과 같다.

$$u_c(\delta_t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial \delta_i} \right)^2 u^2(\delta_i)$$

따라서

$$u_c(\delta_t) = \left(\frac{\partial \delta_t}{\partial \delta_s} \right)^2 u^2(\delta_s) + \left(\frac{\partial \delta_t}{\partial \Delta\delta} \right)^2 u^2(\Delta\delta)$$

이고 이 식에서 $u^2(\delta_s) = u^2(\delta_1)$

$$u^2(\Delta\delta) = u^2(\delta_2) + u^2(\delta_3)$$

여기서 $u(\delta_1)$: 표준 TVC의 교직차 불확도

$u(\delta_2)$: 반복측정에 의한 우연효과 불확도

$u(\delta_3)$: 자동교정장치의 계통효과 불확도

또한 감도계수는 다음과 같다.

$$c_1 \equiv \frac{\partial \delta_t}{\partial \delta_s} = 1, \quad c_2 \equiv \frac{\partial \delta_t}{\partial \Delta \delta} = 1$$

K.4.2.2 불확도 평가분석

1) 표준 TVC의 교직차

이 측정에서 사용된 표준 TVC의 교직차 δ_s 는 1997년도에 실시한 CCE 국제비교에 의해서 결정되었다. 즉 국제비교에 참여한 각국 표준기관의 평균값과 주파수 1 kHz에서 0.5×10^{-6} 이하로 일치되었으며, 따라서 δ_s 에 대한 불확도는 1×10^{-6} 이하로 평가되었다. 그러므로 표준 TVC의 표준불확도는 $u(\delta_1) = 1 \text{ ppm}$, 자유도 $\nu_1 = \infty$ 가 된다.

2) 반복측정에 따른 불확도

① 반복측정에 의한 우연효과 불확도

측정된 교직차의 평균:

$$\overline{\Delta \delta} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \delta(i)}{n} = 3.04 \times 10^{-6}$$

평균의 시험표준편차:

$$s(\overline{\Delta \delta}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta \delta(i) - \overline{\Delta \delta})^2} = 0.4 \times 10^{-6}$$

A형 표준불확도: $u(\delta_2) = s(\overline{\Delta \delta}) = 0.4 \times 10^{-6}$

자유도: $\nu_2 = 11$

② 자동교정장치의 계통효과 불확도

사용된 자동교정장치에 대한 불확도 요인으로서 AC effect, nanovoltmeter의 정확도, n의 결정 등이 있으며, 전체적으로 직각확률분포로 볼 때 자동

교정장치의 불확도는 1×10^{-6} 으로 분석되었기 때문에

표준불확도 $u(\delta_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 10^{-6}$ 이고, 자유도 $\nu_3 = \infty$ 가 된다.

따라서 ①과 ②로부터

$$\begin{aligned}
 u(\Delta\delta) &= \sqrt{u^2(\delta_2) + u^2(\delta_3)} \\
 &= \sqrt{(0.4 \times 10^{-6})^2 + (0.58 \times 10^{-6})^2} \\
 &= 0.71 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

와 같으며 유효자유도는 다음과 같다.

$$\omega = \frac{(0.71 \times 10^{-6})^4}{\frac{(0.4 \times 10^{-6})^4}{11} + \frac{(0.58 \times 10^{-6})^4}{\infty}} = 109$$

K.4.3 합성표준불확도

측정된 교직차의 합성표준불확도는 아래와 같으며,

$$\begin{aligned}
 u_c(\delta) &= \sqrt{(1 \times 10^{-6})^2 + (0.71 \times 10^{-6})^2} \\
 &= 1.22 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

유효자유도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 v_{\text{eff}} &= \frac{u_c^4(\delta_t)}{\frac{u^4(\delta_s)}{v_1} + \frac{u^4(\Delta\delta)}{\omega}} \\
 &= \frac{(1.22 \times 10^{-6})^4}{\frac{(1 \times 10^{-6})^4}{\infty} + \frac{(0.71 \times 10^{-6})^4}{109}} \\
 &= 950
 \end{aligned}$$

K.4.4 확장불확도

95 % 신뢰수준에서 $v_{\text{eff}} = 950$ 에 대한 포함인자를 t 분포표에서 찾으면 $k = 1.96$ 이므로 확장불확도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 U &= k u_c(\delta) = 1.96 \times 1.22 \times 10^{-6} \\
 &\cong 2.4 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

K.4.5 불확도 총괄표

불확도 요인	Type	표준불확도 $\times 10^{-6}$	확률 분포	적용인자	자유도
국제비교	B	1	정규	1	∞
반복측정	A	0.4	정규	1	11
자동교정기	B	0.58	직사각형	1	∞
	합성표준불확도	1.22	t	-	> 900
	확장 불확도	2.4	t	1.96	> 900

K.4.6 측정결과 보고

2 V-TVC를 주파수 1 kHz에서 비교측정한 교직차는 다음과 같다.

$$\delta_t = \delta_s + \Delta\delta = -2.96 \text{ ppm} \pm 2.40 \text{ ppm}, \quad k = 1.96 \quad \text{신뢰수준 } 95 \%$$

K.5 산-염기 적정의 불확도 산출

약 0.1 mol/L인 HCl의 농도를 결정하기 위하여 표준물질 KHP를 사용하여 NaOH의 농도를 결정하고, 이를 이용하여 HCl의 농도와 불확도를 구하려고 한다. 이 시험은 여러 과정으로 구성되어 있어 계산이 복잡하지만, 단계별로 나누어 각 단계의 합성표준불확도를 구한 다음, 모든 과정의 불확도를 구하고자 한다.

K.5.1 모델

적정 과정을 다음 세 개의 수식으로 나타낼 수 있으며, 각 단계는 표 K.3에 요약하였다.

$$C_{\text{KHP}} = \frac{1000 \times m_{\text{KHP}} \times P_{\text{KHP}}}{V_f \times F_{\text{KHP}}} \quad (\text{K.5.1})$$

C_{KHP} : KHP의 농도 (mol/L)

m_{KHP} : KHP의 질량 (g)

F_{KHP} : KHP의 분자량 (g/mol)

P_{KHP} : KHP의 순도

V_f : KHP 용액의 부피 (mL)

$$C_{\text{NaOH}} = \frac{C_{\text{KHP}} \times V_{\text{KHP}}}{V_{\text{N1}}} \quad (\text{K.5.2})$$

C_{NaOH} : NaOH 용액의 농도(mol/L)

V_{N1} : 적정된 NaOH 용액의 부피 (mL) (표 K.3의 단계 5)

V_{KHP} : KHP의 적정 부피(mL)

$$C_{\text{HCl}} = \frac{C_{\text{NaOH}} \times V_{\text{N2}}}{V_{\text{HCl}}} \quad (\text{K.5.3})$$

C_{HCl} : HCl의 농도(mol/L)

C_{NaOH} : NaOH의 농도(mol/L)

V_{N2} : 적정된 NaOH의 부피(mL)(표 K.3의 단계 8)

V_{HCl} : HCl 용액의 적정 부피 (mL)

표 K.3 - 시험 순서에 따른 각 단계 설명

단계	설 명	표기
1	KHP의 질량	m_{KHP}
2	KHP 용액의 부피	V_f
3	KHP 농도	C_{KHP}
4	NaOH 용액 준비	-
5	KHP 적정에 사용된 NaOH의 부피	V_{N1}
6	NaOH에 대한 KHP의 적정량	V_{KHP}
7	NaOH 용액의 농도	C_{NaOH}
8	HCl 적정에 사용된 NaOH의 부피	V_{N2}
9	NaOH에 대한 HCl의 적정량	V_{HCl}
10	HCl 용액의 농도	C_{HCl}

K.5.2 불확도 요소의 평가

K.5.2.1 표준물질 KHP의 질량

0.1 mol/L KHP 표준용액 250 mL를 준비하기 위하여 질량을 정확하게 측정하여야 한다.

$$\frac{204.2236 \times 0.1 \times 250}{1000} = 5.10559 \text{ g}$$

위의 질량은 다음과 같이 차이로부터 구하였다 (KHP와 용기의 질량: 36.1284 g, KHP를 뺀 질량: 31.0234 g, 따라서 KHP의 질량: 5.1050 g).

특정한 질량의 어떤 범위에서의 변동과 저울의 교정에 수반되는 불확도를 생각할 수 있다. 품질관리도로부터 50 g까지는 0.07 mg의 표준편차가 있고, 차이를 이용하여 구하는 질량에 대한 교정성적서에서 95 % 신뢰수준으로 ± 0.1 mg의 불확도를 가지고 있으므로, 이 값을 1.96으로 나누어줌으로써 표준불확도는 $0.1/1.96 = 0.052$ mg이 된다.

위의 두 가지의 표준불확도를 불확도의 전파법칙을 사용하여 합성하면 질량 측정에 관련된 합성표준불확도 $u(m_{KHP})$ 는 다음과 같다.

$$u(m_{KHP}) = \sqrt{0.052^2 + 0.07^2} = 0.087 \text{ mg}$$

K.5.2.2 KHP 용액 만들기

용량 플라스크의 사용에서 용액의 부피에 관련되는 주요한 불확도는 다음과 같다.

- ① 플라스크 부피에 대한 불확도
- ② 눈금 맞추기에 따른 변동
- ③ 온도에 따른 부피 변화

제조업자에 의해 주어진 용량 플라스크의 규격은 250 ± 0.15 mL이다. 이 값은 신뢰수준이 주어지지 않았으므로 직사각형 분포라고 가정하여 이에 대한 표준불확도는 $0.15/\sqrt{3} = 0.087$ mL이다. 눈금 맞추기에 따른 불확도는 대상이 되는 플라스크에 대한 반복시험으로 측정되어진다. 250 mL 플라스크에 10번 가득 채우고 질량을 측정하여 구한 표준편차는 0.012 mL이다. 이 표준편차가 눈금 맞추기에 대한 표준불확도가 된다.

마지막으로 온도의 영향에 의한 불확도는 부피 팽창계수와 플라스크의 교정온도와 사용온도로부터 계산할 수 있다. 플라스크에 비해 팽창계수가 훨씬 큰 액체의 부피팽창만 고려하면 된다.

온도 변화는 $\pm 3 \text{ K}$ (95 % 신뢰수준), 물의 부피 팽창 계수는 $2.1 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ 이므로, 95 % 신뢰수준으로서 온도 변화에 따른 부피의 불확도는 $\pm V \times 3 \times 2.1 \times 10^{-4}$ 이므로, 250 mL 플라스크의 불확도는 95 % 신뢰수준으로 $250 \times 3 \times 2.1 \times 10^{-4} = 0.158 \text{ mL}$ 이다. 이 값을 1.96으로 나누어 표준불확도 $\pm 0.08 \text{ mL}$ 를 구한다. 위의 세 가지를 합성하면 용액 제조에 관련된 부피(V_f)의 합성표준불확도는 다음과 같다.

$$u(V_f) = \sqrt{0.08^2 + 0.012^2 + 0.087^2} = 0.12 \text{ mL}$$

K.5.2.3 KHP 용액의 농도

KHP 용액의 농도 계산은 식(K.5.1)을 이용하면 다음과 같다.

$$C_{\text{KHP}} = \frac{1000 \times m_{\text{KHP}} \times P_{\text{KHP}}}{V_{\text{KHP}} \times F_{\text{KHP}}}$$

V_{KHP} , m_{KHP} 의 불확도는 K.5.2.1과 K.5.2.2에서 구하였고, C_{KHP} 를 계산하기 위하여 P_{KHP} , F_{KHP} 의 불확도가 필요하다.

KHP의 분자량: KHP의 분자식은 $\text{C}_8\text{H}_5\text{O}_4\text{K}$ 이며, 분자량의 불확도는 구성요소인 원자량의 불확도로부터 얻어진다. 표 K.4와 같은 원자량에 대한 불확도는 IUPAC 주관으로 Journal of Pure and Applied Chemistry에 2년에 한번씩 발표되고 있다.

표 K.4 - KHP 구성요소의 원자량과 불확도

원 소	원자량	발표된 불확도	표준불확도
C	12.011	± 0.001	0.00058
H	1.00794	± 0.00007	0.000040
O	15.9994	± 0.0003	0.00017
K	39.0983	± 0.0001	0.000058

각 원소의 표준불확도는 직사각형 분포로 가정하여, 표 K.4의 각 값들을 $\sqrt{3}$ 으로 나눔으로써 얻어진다. 각각의 원자수를 각 원소의 표준불확도를 곱하여 표 K.5에 정리하였다.

표 K.5 - 각 원자 개수에 따른 원소의 불확도

	계 산	결 과	불 확 도
C ₈	8×12.011	96.088	0.0046
H ₅	5×1.00794	5.0397	0.00020
O ₄	4×15.9994	63.9976	0.00068
K	1×39.0983	39.0983	0.000058

KHP의 분자량은 다음과 같다.

$$F_{\text{KHP}} = 96.088 + 5.0397 + 63.9976 + 39.0983$$

$$= 204.2236 \text{ g/mol}$$

분자량의 불확도 $u(F_{\text{KHP}})$ 는 불확도 전파법칙에 따라 각 값의 제곱합의 제곱근이 된다.

$$u(F_{\text{KHP}}) = \sqrt{0.0046^2 + 0.0002^2 + 0.00068^2 + 0.000058^2}$$

$$= 0.0047 \text{ g/mol}$$

[주]

분자량은 각 원소의 개수에 의해 정해지므로, 한 원소에 대한 제곱합의 제곱근 방법으로 불확도를 구할 수 있다고 생각할 수 있다. 탄소의 경우를 예로 들어보면 다음과 같이 정해질 수 있다고 생각할 수 있다.

$$u(C_8) = \sqrt{8 \times 0.00058^2} = \pm 0.0016$$

하지만, 이는 각 성분이 독립적으로 얻어진 경우에만 사용하는 것이다. 여기에서는 8개의 탄소 원소의 값이 독립적으로 구하여진 것이 아니고, 한 값을 8번 사용하는 것이므로, 단지 원소의 개수를 표준불확도에 곱함으로써 불확도를 구할 수 있다. 각기 다른 원소들은 독립적으로 구한 값이므로 일반적인 제곱합의 제곱근 방법을 사용하면 된다.

[KOLAS 주]

이는 상관계수가 1인 경우와 0인 경우를 구별하여 불확도 전파법칙이 적용된 것이다.

KHP의 순도 : KHP의 순도는 99.9 ± 0.1 %로 제공자의 규격에서 얻을 수 있다. 인용된 불확도는 직사각형분포를 가정하여, 표준불확도 $u(P_{KHP})$ 는 $0.001/\sqrt{3} = 0.00058$ 이다.

KHP의 농도 : KHP의 농도 C_{KHP} 는 식(K.5.1)으로부터 구할 수 있다.

$$C_{KHP} = \frac{1000 \times m_{KHP} \times P_{KHP}}{V_f \times F_{KHP}}$$

중간 단계에서의 불확도를 표 K.6에 정리하였으며, 상대표준불확도로 표현하였다. 농도를 구하는 식에서 곱하기로 표시된 각각의 요소들과 관련된 불확도들의 합성은 상대표준불확도를 사용하면 쉽다.

표 K.6 - KHP 농도에 관련된 불확도

요 소	값	불 확 도	상대표준불확도
m_{KHP}	5.105	0.000087	1.7×10^{-5}
P_{KHP}	0.999	0.00058	5.8×10^{-4}
V_f	250	0.12	4.8×10^{-4}
F_{KHP}	204.2236	0.0047	2.3×10^{-5}

여기서 얻은 값들을 사용하면 다음과 같다.

$$C_{KHP} = \frac{1000 \times 5.105 \times 0.999}{250 \times 204.2236} = 0.0999 \text{ mol/L}$$

KHP 농도는 0.0999 mol/L이고

$$\begin{aligned} & \frac{u(C_{\text{KHP}})}{C_{\text{KHP}}} \\ &= [(1.7 \times 10^{-5})^2 + (5.8 \times 10^{-4})^2 + (4.8 \times 10^{-4})^2 \\ &+ (2.3 \times 10^{-5})^2]^{\frac{1}{2}} = 7.5 \times 10^{-4} \\ &u(C_{\text{KHP}}) = 0.0999 \times 7.5 \times 10^{-4} \approx 8 \times 10^{-5} \text{ mol/L} \end{aligned}$$

표준불확도는 $8 \times 10^{-5} \text{ mol/L}$ 이다.

K.5.2.4 NaOH 용액의 제조

0.1 mol/L NaOH를 제조하려 한다. 이 물질은 분자량이 39.9971 g/mol이고, KHP와 마찬가지로 분자량의 불확도와 함께 순도에 따른 불확도를 고려하여야 한다. 그러나 NaOH의 농도는 직접적인 계산이 아니고 KHP의 용액에 의해서 결정되기 때문에 분자량이나 취한 질량에 관련되는 불확도 정보가 필요하지 않다. 250 mL 용액을 준비하기 위해서 가능한 0.9989 g에 가까운 양을 필요로 하며 이 예에서는 사용된 NaOH의 양은 1.0078 g이다. 다시 말하지만, 질량 측정에 따른 불확도는 다음 단계의 연관된 값과 관계가 없으므로 고려하지 않아도 된다.

K.5.2.5 적정에 필요한 NaOH 용액의 사용량

25 mL NaOH 용액을 피펫으로 옮겨야 하는데, 플라스크의 경우와 마찬가지로 25 mL 피펫 사용에서의 불확도는 3가지 요소에 의해 발생된다.

- ① 피펫 부피의 불확도
- ② 피펫 눈금보기의 개인 차
- ③ 온도의 차이에 따른 부피의 불확도

피펫의 부피에 대한 불확도는 제조업자에 의해 $\pm 0.03 \text{ mL}$ 로 주어졌으며 이의 표준불확도는 직사각형 분포를 가정하여 $0.03 / \sqrt{3} = 0.017$ 이다. 눈금보기에 따른 표준불확도는 반복시험에서 결정하며 표준편차는 0.0092 mL이다. 이 값을 표준불확도로 직접 사용한다. 온도차이로 인한 불확도는 K.5.2.1에서 처럼 계산된다. 온도 변화를 $\pm 3 \text{ K}$ (신뢰도 95 %)로 취하고 물의 부피팽창계수를 $2.1 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ 로 사용하며 이에 따른 불확도는 $\pm 0.008 \text{ mL}$ 로 주어진다. 부피 VN1에서 각 원인의 불확도를 합성하면 다음과 같다.

$$u(V_{N_1}) = \sqrt{0.017^2 + 0.0092^2 + 0.008^2} = 0.021 \text{ mL}$$

K.5.2.6 NaOH 적정에 사용된 KHP 표준용액의 부피

적정은 50 mL 뷰렛을 사용해서 이루어지며, 3가지의 주요한 불확도 성분은 앞서의 부피 측정과 같이 용기의 정확성, 반복성, 개인의 차이에 대한 변동, 온도의 영향이다. 배출량을 측정할 때 각 배출량에 따른 불확도를 조사하여야 한다. 제조업자의 눈금의 정확성은 $\pm 0.05 \text{ mL}$ 이고, $0.05/\sqrt{3} = 0.029 \text{ mL}$ 가 표준 불확도가 된다.

반복성에 관련하여, 예상 배출량을 25 mL로 하여, 여러 번 시험하여 구한 표준편차 0.013 mL를 표준불확도로 사용한다. 25 mL 부피의 온도 영향으로 인한 불확도(전처럼 $\pm 3 \text{ K}$ 로 하였을 때)는 0.008 mL 이다. 여기서 VKHP는 24.85 mL이며, 이에 따른 합성표준불확도는 다음과 같다.

$$u(V_{\text{KHP}}) = \sqrt{0.013^2 + 0.029^2 + 0.008^2} = 0.033 \text{ mL}$$

K.5.2.7 NaOH의 농도

NaOH의 농도 C_{NaOH} 는 식(K.5.2)로부터 구한다.

$$C_{\text{NaOH}} = \frac{C_{\text{KHP}} \times V_{\text{KHP}}}{V_{N_1}}$$

표 K.3의 단계 4~6으로부터 구한 각각의 값과 불확도는 표 K.7과 같으며,

표 K.7 - NaOH의 농도에 관련된 불확도

	값	불 확 도	상대표준불확도
C_{KHP}	0.0999	0.00008	8×10^{-4}
V_{KHP}	24.85	0.033	1.3×10^{-3}
V_{N_1}	25.0	0.021	8.4×10^{-4}

NaOH 용액의 농도는 다음과 같다.

$$C_{\text{NaOH}} = (0.0999 \times 24.85) / 25.0 = 0.0993 \text{ mol/L}$$

불확도를 합성하기 위해서는 식(K.5.2)에서 처럼 곱으로 표현되는 경우, 상대표준불확도를 사용하면 편리하다.

$$\begin{aligned} \frac{u(C_{\text{NaOH}})}{C_{\text{NaOH}}} &= \sqrt{(8 \times 10^{-4})^2 + (1.3 \times 10^{-3})^2 + (8.4 \times 10^{-4})^2} \\ &= 0.0017 \end{aligned}$$

NaOH 농도의 표준불확도 $u(C_{\text{NaOH}})$ 는 다음과 같다.

$$u(C_{\text{NaOH}}) = 0.0017 \times 0.0993 = 0.00017 \text{ mol/L}$$

K.5.2.8 NaOH 용액 옮기기

이 단계는 기준이 되는 NaOH에 대하여 HCl을 적정하는 첫 단계이다. 이는 K.5.2.5에서와 마찬가지로, 25 mL 피펫을 사용하여 NaOH 수용액을 준비한다. 그러므로 V_{N_2} 는 25 mL이고, 표준불확도 $u(V_{\text{N}_2})$ 는 0.21 mL이다.

K.5.2.9 NaOH에 대한 HCl 적정

50 mL 뷰렛을 사용했을 때 V_{HCl} 의 부피는 25.45 mL이다. K.5.2.6에서의 적정과 같은 식을 사용하고 온도의 영향이 같을 것이라고 가정했을 때 표준불확도 $u(V_{\text{HCl}})$ 는 0.033 mL이다.

K.5.2.10 HCl의 농도

HCl의 농도 C_{HCl} 는 식(K.5.3)으로부터 구한다.

$$C_{\text{HCl}} = \frac{C_{\text{NaOH}} \times V_{\text{N}_2}}{V_{\text{HCl}}}$$

각 값과 그에 따른 불확도는 표 K.8과 같으며,

표 K.8 - HCl의 농도에 관련된 불확도

	값	불 확 도	상대표준불확도
C_{NaOH}	0.0993	0.00017	1.7×10^{-3}
V_{N_2}	25.0	0.021	8.4×10^{-4}
V_{HCl}	25.45	0.033	1.3×10^{-3}

식(K.5.3)으로부터 HCl의 농도는

$$C_{\text{HCl}} = (0.0993 \times 25.0) / 25.45 = 0.0975 \text{ mol/L}$$

이고, 불확도를 합성하기 위해서는 식(K.5.3)에서 처럼 곱으로 표현되는 경우에 상대표준불확도를 사용하면 편리하다.

$$\begin{aligned} & \frac{u(C_{\text{HCl}})}{C_{\text{HCl}}} \\ &= \sqrt{(1.7 \times 10^{-3})^2 + (8.4 \times 10^{-4})^2 + (1.3 \times 10^{-3})^2} \\ &= 2.3 \times 10^{-3} \\ & u(C_{\text{HCl}}) = 2.3 \times 10^{-3} \times 0.0975 = 0.00022 \text{ mol/L} \end{aligned}$$

K.5.3 확장불확도의 계산

확장불확도 $U(C_{\text{HCl}})$ 는 합성표준불확도에 포함인자 ($k=2$)를 곱함으로써 얻어진다.

$$U(C_{\text{HCl}}) = 0.00022 \times 2 = 0.00044 \text{ mol/L}$$

결과로서, HCl용액의 농도는 0.0975 mol/L가 되며, 확장불확도는 0.00044 mol/L ($k=2$)이다.

K.5.4 다른 방법

위의 순차적인 계산은 간단하지만 각 불확도 요소들의 상대적인 크기를 분명하게 구별하기가 어렵다. 따라서 각 단계의 식(K.5.1)~(K.5.3)을 하나의

식(K.5.4)으로 나타내어, 모든 불확도 요소의 값을 구한 뒤 합성할 수 있다.

$$C_{\text{HCl}} = \frac{1000 \times m_{\text{KHP}} \times P_{\text{KHP}} \times V_{\text{KHP}} \times V_{\text{N}_2}}{V_f \times F_{\text{KHP}} \times V_{\text{N}_1} \times V_{\text{HCl}}} \quad (\text{K.5.4})$$

앞에서 구한 각각의 요소들의 상대불확도를 표 K.9에 정리하였다.

$$C_{\text{HCl}} = \frac{1000 \times 5.105 \times 0.999 \times 24.85 \times 25.0}{250 \times 204.2236 \times 25.0 \times 25.45} = 0.0975 \text{ mol/L}$$

$$\begin{aligned} u \frac{C_{\text{HCl}}}{C_{\text{HCl}}} &= [(1.7 \times 10^{-5})^2 + (5.8 \times 10^{-4})^2 + \dots \\ &\quad + (8.4 \times 10^{-4})^2 + (1.3 \times 10^{-3})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2.3 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

표 K.9 - 각 단계에서의 불확도

	요 소	값	상 대 불 확 도
m_{KHP}	KHP의 질량	5.1050	1.7×10^{-5}
P_{KHP}	KHP의 순도	0.999	5.8×10^{-4}
V_{KHP}	NaOH의 부피	24.85	1.3×10^{-3}
V_{N_1}	KHP적정에 사용된 NaOH의 부피	25.0	8.4×10^{-4}
V_f	KHP 용액의 부피	250	4.8×10^{-4}
F_{KHP}	KHP의 분자량	204.2236	2.3×10^{-5}
V_{N_2}	HCl 적정에 사용된 NaOH의 부피	25.0	8.4×10^{-4}
V_{HCl}	HCl의 부피	25.45	1.3×10^{-3}
C_{HCl}	HCl의 농도	0.0975	2.3×10^{-3}

$$u(C_{\text{HCl}}) = 0.0975 \times 2.3 \times 10^{-3} = 0.00022 \text{ mol/L}$$

표 K.9로부터, 각 단계에서의 관계된 값을 비교할 수 있다. 예를 들어 두 부피 V_{HCl} 와 V_{KHP} 는 총 불확도에 각각 1.3×10^{-3} 씩 기여한다. 이 두 값을 합하면 1.8×10^{-3} 으로 추정된 불확도의 80%에 달한다. 대조적으로 m_{KHP} 와 F_{KHP} 의 불확도는 총 불확도의 2% 미만을 차지한다. 이것으로 시험의 정확성은 뷰렛을 사용하는 적정과정에 달려 있음을 알 수 있다.

K.5.5 적정의 불확도 원인

이 예는 마지막 결과에 영향을 줄 수 있는 불확도의 모든 원인을 적용한 것은 아니다. 이 예에 사용된 것들도 포함하여, 불확도의 원인이 되는 목록을 아래에 나열하였다. 경우에 따라 중요한 불확도 요소는 불확도 계산에 포함시켜야 된다.

- ① 질량-저울의 교정과 반복성*
- ② 질량-공기의 영향으로 인한 부력
- ③ 온도의 영향*
- ④ 질량을 잴 물질의 순도*
- ⑤ 물질의 분자량*
- ⑥ 천연 불순물 즉, 염기 안의 다른 염기
- ⑦ 부피 측정용 유기기구의 불확도*
- ⑧ 종말점 발견
- ⑨ 부반응 즉, 공기중에서 CO₂ 흡수

*예에 포함되어 있음

[참고]

이 예제는 Eurachem에서 2012년 발행한 "Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement"에서의 한 예제를 번역한 것이다.